

פרק 13 - חשבון מעולם אחר

מה בפרק?

חשבון בבסיס 5 • מנייה • חיבור • חיסור • מספרים זוגיים ואי-זוגיים • כפל • חילוק

בפרק זה, החותם את חלק האריתמטיקה בספר זה, נדמיין אנושות שפיתחה עולם חשבוני שונה משלנו. במקום לייצג מספרים לפי שיטה שבה מאגדים עשרה עצמים ליחידה חדשה, אנושות זו בחרה לייצג מספרים לפי שיטה שבה מאגדים חמישה עצמים ליחידה חדשה. שיטת מנייה המבוססת על עיקרון זה נקראת **מנייה בבסיס חמש**. כוונת הפרק אינה ללמד חשבון בבסיסים שונים מ-10, אלא לתת הזדמנות להתבונן מהצד על עולם המספרים שלו אנחנו מורגלים, ובמיוחד לאפשר למורים לחוות חלקית את האתגרים העומדים לפני תלמידיהם. לעתים קשה לאדם בוגר להבין את מורכבותו של החשבון, מפני שהוא מורגל לו מגיל צעיר. החלפת בסיס המנייה מציבה אותנו על קרקע פחות בטוחה, ובכך מאלצת אותנו לחשוב על כל צעד שאנחנו עושים. נציין שפרק זה שונה מקודמיו מאחר שאינו עוסק בנושא שכלול בתוכנית הלימודים לבית הספר היסודי.

מנייה בבסיס חמש

זוכרים את אגדת הרועה בפרק 2? אם כן, דמיינו שגלגלי ההיסטוריה היו מתגלגלים באופן מעט שונה, ושאותו רועה שרצה למנות את הכבשים שבעדרו ידע למנות רק עד חמש (אולי מפני שחמש הוא מספר האצבעות ביד אחת). וכך, בכל פעם שהיה מונה חמש כבשים, היה מטיל אל תוך הכד אבן שתייצג בעבורו צירוף של חמש כבשים, ואם בסוף תהליך המנייה נשארו בעדר פחות מחמש כבשים שאותן טרם מנה, היה מוסיף לכד אבן זעירה כנגד כל כבשה. בשונה מאגדת הרועה שבפרק 2, נדמיין שבשובו לביתו פרק הרועה את תכולת הכד, ומצא בו, נוסף על האבנים הזעירות שאותן ידע למנות – הרי היו מהן פחות מחמש – ריבוי של אבנים גדולות שאותן לא ידע למנות. מה יעשה? הרועה החליט להחיל את עקרון הצירוף פעם נוספת, והחל למנות את האבנים הגדולות. בכל פעם שמנה חמש אבנים גדולות, החליף אותן באצטרובל, והמשיך לעשות כך עד שנותרו פחות מחמש אבנים גדולות. בגמר התהליך היו בידיו שני אצטרובלים, שלוש אבנים גדולות ושלוש אבנים זעירות, כפי שמוצג באיור 13.1:



איור 13.1

הרועה ידע שכל אבן זעירה מייצגת כבשה, שכל אבן גדולה מייצגת חמש כבשים, ושכל אצטרובל מייצג צירוף של חמש קבוצות שבכל אחת חמש כבשים.

ועתה נפתח את דרך המנייה הנובעת מהעיקרון שתואר לעיל. במקרה כזה, מנייה היתה מתחילה כך:

אפס, אחת, שתיים, שלוש, ארבע

אבל ברגע שהיה נוסף עוד עצם, היה עלינו לאגד את חמשת העצמים לכדי יחידה חדשה. נכנה אותה **חֲמִשָּׁה**, וממנה נמשיך למנות:

חמשה ואחת, חמשה ושתיים, חמשה ושלוש, חמשה וארבע, שתי חמשות

והלאה:

שתי חמשות ואחת, שתי חמשות ושתיים, שתי חמשות ושלוש, שתי חמשות וארבע, שלוש חמשות

ועוד הלאה:

... ארבע חמשות ושלוש, ארבע חמשות וארבע

כיצד נמשיך מכאן? נאגד שוב חמש אחדות לכדי חמשה אחת, ונקבל חמש חמשות, שאותן נאגד ליחידה חדשה - היא האצרוכל באגדת הרועה - ואותה נכנה **תֵּתָה**. נמשיך למנות, וכשנגיע לחמשה של תתות נאגד אותן ליחידה חדשה שאותה נכנה **בֶּבֶה**. את היחידות - חמשה, תתה ובבה - נכנה **יחידות חמשיות**. עתה נכתוב את המספרים בכתיב חשבוני, וניעזר לשם כך בשיטת ערך המקום: העמודה הימנית ביותר תמנה אחדות, זאת שמשמאלה תמנה חמשות, זאת שמשמאל לחמשות תמנה תתות, וזאת שמשמאל לתתות תמנה בבות. את המספרים בין אפס לארבע נכתוב כך:

0, 1, 2, 3, 4

את המספר העוקב - חמשה - נכתוב כך: 10, 0 לייצוג 0 האחדות ו-1 לייצוג החמשה האחת. את המשך סדרת המספרים נכתוב כך:

10, 11, 12, 13, 14

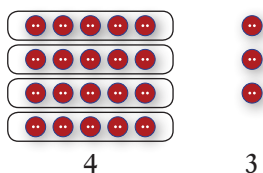
המספר העוקב ל-14 יהיה 20, כי הוא מייצג 0 אחדות ו-2 חמשות. נמשיך בסדרת המספרים:

20, 21, 22, 23, 24

30, 31, 32, 33, 34

40, 41, 42, 43, 44

אם ניקח למשל את המספר שייצוגו בעולם זה של בסיס חמש הוא 43 - 4 חמשות ו-3 אחדות - אפשר להציגו באופן מוחשי כך:



איור 13.2

את המספר העוקב ל-44 - תתה - נכתוב כך: 100, כי הוא מייצג 0 אחדות, 0 חמשות ותתה אחת. נמשיך בסדרת המספרים:

100, 101, 102, 103, 104, 110, 111, ..., 143, 144

200, 201, 202, 203, 204, 210, 211, ..., 243, 244

300, 301, 302, 303, 304, 310, 311, ..., 343, 344

400, 401, 402, 403, 404, 410, 411, ..., 443, 444

את המספר העוקב - בבה - נכתוב כך: 1000, כי הוא מונה 0 אחדות, 0 חמשות, 0 תתות ובבה אחת.

שימו לב: נתבונן במספר

בבה, שלוש-תתות, ארבע-חמשות ושתיים

שבבסיס חמש נכתב כך:

1342

האם אתם מסוגלים לחוש את המספר? האם אתם מצליחים לתפוס אותו מבחינת הכמות? האם לדעתכם המספר מייצג בקירוב את מספר התלמידים בבית ספרכם? האם הוא הרבה יותר גדול? ואולי הרבה יותר קטן?

חיבור בבסיס חמש

כיצד מחשבים תרגילי חיבור בבסיס חמש? אילו היינו תלמידים בבית ספר של אנושות המונה לפי בסיס חמש, היינו מתמודדים בשלב ראשון עם תרגילים שאינם חוצים את תחום החמשה הראשונה. למשל:

$$1 + 1 = \boxed{?} \quad 2 + 2 = \boxed{?} \quad 3 + 0 = \boxed{?}$$

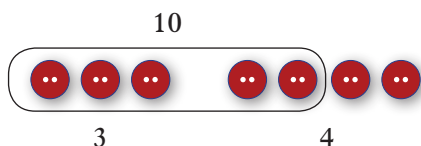
מאחר שמשמעות פעולת החיבור אינה משתנה, פתרונות התרגילים יהיו כאלה:

$$1 + 1 = 2 \quad 2 + 2 = 4 \quad 3 + 0 = 3$$

אבל מה קורה כשחוצים את תחום החמשה הראשונה? כיצד מתמודדים למשל עם התרגיל:

$$3 + 4 = \boxed{?}$$

דרך אפשרית לפתרון תרגיל זה היא ליישם את העיקרון שלפיו "מי שיודע למנות יודע לחבר" (ראו עמ' 39), כלומר לצרף קבוצה שבה 3 עצמים לקבוצה שבה 4 עצמים, ולמנות את מספר העצמים בקבוצה שהתקבלה. איור 13.3 מדגים כיצד להגיע אל הפתרון באמצעות המחשה מתאימה:



איור 13.3

באיור 13.3 צירפנו חמשה של סימנים, וקיבלנו חמשה אחת ושני סימנים לא מאוגדים, כמות שאנחנו מייצגים כך: 12.

דרך נוספת להגיע לפתרון היא באמצעות "השלמה לחמשה" המבוססת על חוק הקיבוץ:

$$3 + 4 = (3 + 2) + 2 = 10 + 2 = 12$$

ובאופן דומה:

$$4 + 1 = 10$$

(במילים: ארבע ועוד אחת שווה חמשה) מפני שבייצוג לפי בסיס חמש 10 הוא המספר העוקב ל-4, וכמו כן:

$$3 + 3 = 11$$

(במילים: שלוש ועוד שלוש שווה חמשה ואחת) מפני שאנחנו כבר יודעים ש: $12 = 3 + 4$, ואנחנו יכולים להחיל את העיקרון שלפיו הקטנת אחד המחברים ב-1 מקטינה את הסכום באותו השיעור (עמ' 55). בשלב זה, וכהכנה לחישובים מורכבים יותר, נציג את לוח החיבור של חשבון בבסיס חמש, שאותו היו לומדים תלמידי כיתה א:

+	0	1	2	3	4	10
0	0	1	2	3	4	10
1	1	2	3	4	10	11
2	2	3	4	10	11	12
3	3	4	10	11	12	13
4	4	10	11	12	13	14
10	10	11	12	13	14	20

איור 13.4

כיצד מחברים מספרים מרובי-ספרות? להלן שתי דוגמאות שמהן תתברר השיטה.

חיבור ללא המרה

נתבונן בתרגיל:

$$3,124 + 1,210 = \boxed{?}$$

במילים נוכל לנסח אותו כך:

מהו הסכום של 3 בכות, תתה אחת, 2 חמשות ו-4 אחדות ובבה אחת, 2 תתות, חמשה ו-0 אחדות?

אם ניישם את חוק הקיבוץ ונצרף בנפרד אחדות, חמשות, תתות ובבות, נקבל את הפתרון שייצוגו בבסיס חמש הוא: 4,334. תרגיל זה אינו מחייב המרה בין יחידות חמשיות, כי כל יחידה חמשית מופיעה

לכל היותר 4 פעמים. נוכל להציג את הפתרון גם באמצעות חיבור אנכי:

$$\begin{array}{r} 3124 \\ + 1210 \\ \hline 4334 \end{array}$$

איור 13.5

חיבור עם המרה

עתה נתבונן בתרגיל:

$$1,342 + 1,223 = \boxed{?}$$

במילים נוכל לנסח אותו כך:

מהו הסכום של בבה אחת, 3 תתות, 4 חמשות ו-2 אחדות ובבה אחת, 2 תתות, 2 חמשות ו-3 אחדות? אם ניישם גם כאן את חוק הקיבוץ ונסכום בנפרד כל יחידה חמשית, נקבל 2 בבות, 10 תתות, 11 חמשות ו-10 אחדות, תוצאה שבייצוג הלא-שגרתי, שבו השתמשנו בפרק 10, תיראה כך:

$$\boxed{2|10|11|10}$$

כדי לקבל את התוצאה בייצוג שגרתי, עלינו להמיר 10 אחדות לחמשה, 10 חמשות לתתה ו-10 תתות לבבה. כך:

$$\boxed{2|10|11|10} \rightarrow \boxed{2|10|12|0} \rightarrow \boxed{2|11|2|0} \rightarrow \boxed{3|1|2|0}$$

חישוב התוצאה באמצעות אלגוריתם החיבור האנכי ייעשה כך:

$$\begin{array}{r} \text{א} \quad \begin{array}{r} 111 \\ + 1342 \\ \hline 3120 \end{array} \quad \text{ב} \quad \begin{array}{r} 111 \\ + 1342 \\ \hline 120 \end{array} \quad \text{ג} \quad \begin{array}{r} 111 \\ + 1342 \\ \hline 20 \end{array} \quad \text{ד} \quad \begin{array}{r} 111 \\ + 1342 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

איור 13.6

שימו לב: חישוב תרגילי חיבור בתחום מספרים לא-מוגבל מתבסס על לוח החיבור שבאיור 13.4.

חיסור בבסיס חמש

גם בחשבון בבסיס חמש, ובכל בסיס אחר, חיסור הוא הפעולה ההפוכה לחיבור.

נתבונן בתרגיל:

$$23 - 4 = \boxed{?}$$

לצורך הפתרון נשאל כמה עלינו להוסיף ל-4 כדי לקבל 23, או לחלופין, כמה יישאר לנו אם נגרע 4 מ-23. למעשה עלינו לפתור תרגיל חיבור שבו אחד המחוברים הוא נעלם:

$$4 + \boxed{?} = 23 \quad \text{ובגלל חוק החילוף גם:} \quad \boxed{?} + 4 = 23$$

הפתרון במקרה זה הוא 14, כי בחשבון בבסיס חמש:

$$\boxed{14} + 4 = 23$$

מספרים זוגיים ואי־זוגיים בבסיס חמש

זוכרים מהו מספר זוגי? לפי הגדרה א' שבעמ' 65, מספר הוא זוגי אם נוכל להציג אותו כסכום של שני מספרים שלמים שווים. למשל, 4 הוא זוגי מפני שאפשר להציג אותו כ-2+2. באותו אופן, המספר חמשה ואחת, שייצוגו בבסיס חמש הוא 11, הוא זוגי, שכן

$$11 = 3 + 3$$

ולעומת זאת 12 בבסיס חמש הוא אי־זוגי, שכן אי אפשר להציג אותו כסכום של שני מספרים שלמים שווים.

נתבונן עתה במספר 40,123. כיצד נוכל לקבוע אם הוא זוגי או לא? להלן דרך אפשרית לפתרון:

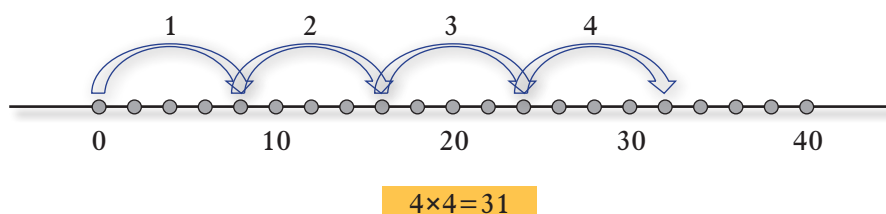
1. 1 הוא מספר אי־זוגי.
2. 10 הוא מספר אי־זוגי, שכן $2+3=10$.
3. 100 הוא מספר אי־זוגי, שכן $10 \times 10 = 100$, כלומר הוא מכפלה של שני מספרים אי־זוגיים.
4. 1000 הוא מספר אי־זוגי, שכן $100 \times 10 = 1000$, כלומר הוא מכפלה של שני מספרים אי־זוגיים.
5. משיקול דומה אנחנו מסיקים שכל היחידות החמשיות הן אי־זוגיות.
6. המספר הנתון כולל:
 - א. 4 פעמים 10,000, שהוא זוגי (מכפלה שבה אחד הגורמים זוגי).
 - ב. פעם אחת 100, שהוא אי־זוגי.
 - ג. 2 פעמים 10, שהוא זוגי (מכפלה שבה אחד הגורמים זוגי).
 - ד. 3 אחדות, שהן אי־זוגיות.
7. בסך הכול, המספר הנתון הוא סכום של 4 מספרים, ששניים מהם זוגיים ושניים מהם אי־זוגיים. מכאן אנחנו מסיקים שהמספר הנתון זוגי.

כפל בבסיס חמש

גם בבסיס חמש, ובכל בסיס אחר, כפל הוא חיבור חוזר. כך למשל:

$$4 \times 4 = 4 + 4 + 4 + 4 = 13 + 4 + 4 = 22 + 4 = 31$$

כדי לפתור תרגילי כפל, נוכל להשתמש במגוון האסטרטגיות שהצגנו בפרק 7. למשל, את התרגיל לעיל נוכל לפתור באמצעות ישר המספרים:



איור 13.7

נוכל גם להיעזר בחוק הקיבוץ. למשל:

$$4 \times 3 = 2 \times (2 \times 3) = 2 \times 11 = 22$$

בסופו של דבר, הייתי ממליץ לתלמידים שמחשבים לפי בסיס חמש ללמוד בעל-פה את לוח הכפל:

×	0	1	2	3	4	10
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	10
2	0	2	4	11	13	20
3	0	3	11	14	22	30
4	0	4	13	22	31	40
10	0	10	20	30	40	100

איור 13.8

שכן זוהי התשתית שעליה יישענו חישובי כפל במספרים רב-ספרתיים.

חילוק בבסיס חמש

גם בבסיס חמש, ובכל בסיס אחר, חילוק הוא פעולה הפוכה לכפל. נתבונן בתרגיל:

$$13 : 2 = \boxed{?}$$

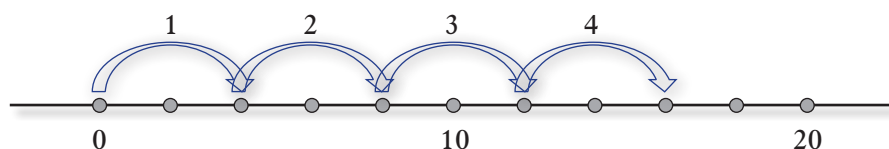
פתרון התרגיל הוא פתרון של תרגיל כפל שבו אחד הגורמים אינו ידוע:

$$2 \times \boxed{?} = 13$$

וגם:

$$\boxed{?} \times 2 = 13$$

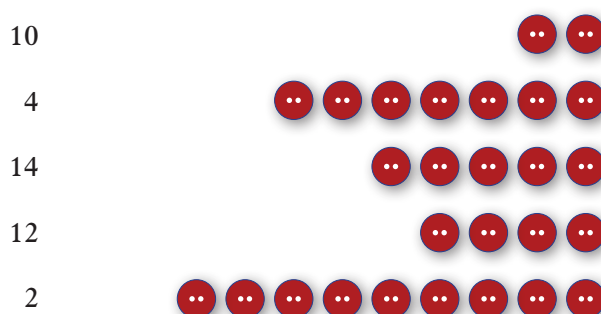
אל הפתרון - 4 - נוכל להגיע במגוון דרכים, למשל, באמצעות "קריאה הפוכה" של לוח הכפל. דרך נוספת היא "מנייה קדימה" שהוצגה בפרק 8 (עמ' 102). כך:



איור 13.9

תרגילים

1. מתחו קו בין הכמות ובין המספר המתאים לה:



2. פתרו את תרגילי החיבור הבאים בתחום ה-20:

$3 + 2 = \boxed{?}$	$4 + 4 = \boxed{?}$
$0 + 3 = \boxed{?}$	$3 + 3 = \boxed{?}$
$4 + 2 = \boxed{?}$	$12 + 3 = \boxed{?}$
$2 + 11 = \boxed{?}$	$3 + 4 = \boxed{?}$
$10 + 3 = \boxed{?}$	$10 + 0 = \boxed{?}$

3. פתרו את תרגילי החיבור הבאים בתחום ה-100:

$14 + 11 = \boxed{?}$	$32 + 4 = \boxed{?}$
$23 + 10 = \boxed{?}$	$4 + 22 = \boxed{?}$
$13 + 13 = \boxed{?}$	$41 + 4 = \boxed{?}$

4. פתרו את תרגילי החיבור הבאים באלגוריתם של חיבור אנכי:

$$444 + 123 = \boxed{?}$$

$$34,102 + 14,334 = \boxed{?}$$

ודאו שאתם מבינים היטב את עקרונות החיבור האנכי.

5. השלימו את הסדרות הבאות:

$$2, 4, 11, 13, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}$$

$$3, 11, 14, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}$$

$$4, 12, 20, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}, \boxed{?}$$

6. פתרו את תרגילי החיסור הבאים בתחום ה-20:

$$14 - 3 = \boxed{?}$$

$$14 - 11 = \boxed{?}$$

$$11 - 3 = \boxed{?}$$

$$10 - 0 = \boxed{?}$$

$$12 - 4 = \boxed{?}$$

$$4 - 2 = \boxed{?}$$

$$10 - 2 = \boxed{?}$$

$$13 - 4 = \boxed{?}$$

7. פתרו את תרגילי החיסור הבאים בתחום ה-100:

$$31 - 4 = \boxed{?}$$

$$100 - 13 = \boxed{?}$$

$$21 - 14 = \boxed{?}$$

$$100 - 44 = \boxed{?}$$

$$40 - 11 = \boxed{?}$$

$$23 - 14 = \boxed{?}$$

8. פתרו את התרגילים הבאים באלגוריתם של חיסור אנכי:

$$1,000 - 123 = \boxed{?}$$

$$34,102 - 14,334 = \boxed{?}$$

ודאו שאתם מבינים היטב את עקרונות החיסור האנכי.

9. מי מבין המספרים הבאים זוגי?

$$4, 12, 43, 142, 44444$$

נסו למצוא כלל שיאפשר לכם לקבוע זוגיותו של מספר.

10. האם נכון שכפל ב-10 (כלומר בחמשה) כרוך בהזזת כל ספרה עמודה אחת שמאלה וקביעת 0 בספרת האחדות? נמקו את תשובתכם.

11. פתרו את תרגילי הכפל הבאים שבהם שני הגורמים הם בתחום החמשה הראשונה:

$$4 \times 4 = \boxed{?}$$

$$4 \times 2 = \boxed{?}$$

$$4 \times 10 = \boxed{?}$$

$$3 \times 3 = \boxed{?}$$

12. פתרו את תרגילי הכפל הבאים שבהם שני הגורמים הם בתחום התתה:

$$22 \times 2 = \boxed{?}$$

$$22 \times 12 = \boxed{?}$$

$$13 \times 44 = \boxed{?}$$

$$22 \times 22 = \boxed{?}$$

13. פתרו את תרגילי החילוק הבאים שבהם המחלק והמנה הם בתחום החמשה הראשונה:

$$13 : 2 = \boxed{?}$$

$$14 : 3 = \boxed{?}$$

$$22 : 3 = \boxed{?}$$

$$13 : 4 = \boxed{?}$$

