

פרק 7 - כפל

- חיבור חוזר • כופל, נכפל ומכפלה • כפול ופעמים • כפל ומנייה • חוק החילוף
- חוק הקיבוץ • חוק הפילוג • כפל ב-1 • כפל ב-0 • מניית צירופים • לוח הכפל
- ספירה בדילוגים • כפל ב-10

מה בפרק?

מהו כפל?

חיבור חוזר

פעולת הכפל היא הפעולה השלישית שלומדים בבית הספר היסודי. הדבר החשוב ביותר שאפשר לומר עליה הוא שהיא קשורה באופן הדוק לפעולת החיבור. נציג את הקשר הזה בדוגמה:



ברשותנו 4 תיבות שבכל אחת 3 מטבעות. כמה מטבעות יש בסך הכול?

התרגיל המתאים הוא:

$$3 + 3 + 3 + 3 = \boxed{12}$$

התרגיל הוא אמנם תרגיל חיבור, אבל קל לראות שיש לו מבנה מיוחד: חיבור חוזר של אותה הכמות, ובמקרה זה, 4 פעמים חיבור של 3, ובמילים אחרות, 4 פעמים 3.

תרגיל זה הוא פשוט ולכן אפשר לבטא אותו בחזרה על פעולת החיבור, אך מה היינו עושים אילו נאמר לנו שברשותנו 186 תיבות שבכל אחת 25 מטבעות, ונשאלנו כמה מטבעות יש בסך הכול? במקרה כזה היה עלינו לכתוב

$$25 + 25 + \dots + 25 + 25$$

186 פעמים, ורק הכתיבה, שלא לדבר על החישוב, היתה מעסיקה אותנו דקות ארוכות. מכיוון שמצבים מסוג זה, שבהם יש לחבר אותה כמות שוב ושוב הם שכיחים מאוד, הומצאה פעולה חשבונית: כפל.

כתיב מתמטי

הביטוי המקוצר לשאלת 186 התיבות הוא:

$$186 \times 25$$

כלומר, 186 פעמים 25. נוסף על סימן ה- $\times$, סימון מקובל נוסף לציון פעולת הכפל הוא נקודה:

$$186 \cdot 25 = 186 \times 25$$

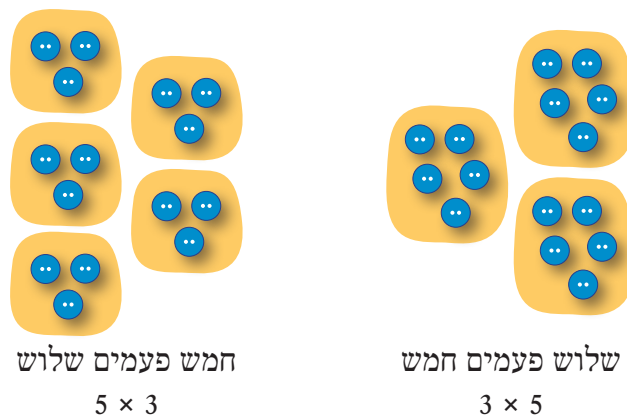
סימן הנקודה נפוץ יותר בחינוך העל-יסודי.

מינוחים בביטוי הכפלי

$$5 \times 7$$

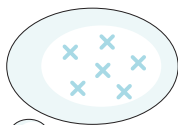
האופרנד הראשון (5) מונה כמה פעמים היחידה הנמנית חוזרת, והוא נקרא **כופל**. האופרנד השני (7) מונה את מספר העצמים בכל יחידה, והוא נקרא **נכפל**. תוצאת פעולת הכפל נקראת **מכפלה**. לעתים נרצה לכנות את שני האופרנדים באותו השם, ואז נכנה אותם **גורמים**.

בפעולת הכפל לכופל ולנכפל תפקידים שונים. הסיבה שבגללה העובדה הזאת לעתים מיטשטשת היא תכונת החילופיות של הכפל, כלומר, תכונתו המאפשרת להחליף את הסדר בין הכופל ובין הנכפל מבלי שהמכפלה תשתנה. עם זאת, הביטויים 3×5 ו- 5×3 מייצגים סיפורים חשבוניים שונים. האחד מייצג 5 יחידות שכל אחת מהן מונה 3 עצמים, בעוד שהאחר מייצג 3 יחידות שכל אחת מהן מונה 5 עצמים. איור 7.1 ממחיש את ההבדל:



איור 7.1

שימו לב: בפרק זה אנחנו עוסקים אך ורק בכפל של מספרים טבעיים ושל 0, ולכן תיאור כפל כחיבור חוזר של כמות קבועה הוא מתבקש. משמעות זו של הכפל תשתנה כשפעולת הכפל תורחב לשברים, ומאוחר יותר למספרים שליליים.



כפול או פעמים?

המילים **כפול** ו**פעמים** מתארות שתיהן את פעולת הכפל. לא אחת נשמעות דעות לכאן ולכאן בדבר עדיפותה של האחת על פני האחרת. מצדדי ה"פעמים" טוענים שהמילה מבהירה את מהות הפעולה כחיבור חוזר, בעוד שמצדדי ה"כפול" טוענים שהמילה "פעמים" יוצרת אסימטריה בין הכופל לנכפל אף על פי שהפעולה סימטרית (כלומר, מאפשרת להחליף בין הכופל ובין הנכפל). כמו כן, הם טוענים שהמילה "פעמים" נעשית חסרת משמעות כשהכופל הוא שבר או מספר שלילי. אני מאמין שבשלבם הראשונים של הלימוד מוטב להשתמש ב"פעמים" כדי להעמיד את הטמעת משמעות הפעולה בראש סדר העדיפויות (ממילא עם הזמן התלמידים יעברו להשתמש ב"כפול"). תפקידי הכופל והנכפל אכן אינם סימטריים במצבים של חיבור חוזר, ולכן חשוב להדגיש זאת לפני התלמידים. בעניין כופל שהוא שבר אטען בהמשך שביטוי כמו " $\frac{1}{2}$ פעמים $\frac{1}{4}$ " הוא תקין. אגב, באנגלית משתמשים במילה times שמשמעותה "פעמים".

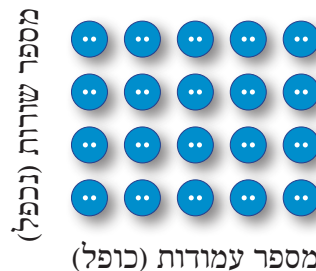
כפל ומנייה

בדיוק כפי שקיים קשר הדוק בין כפל וחיבור, כך קיים קשר הדוק גם בין כפל ומנייה. חשבו לרגע על משמעות הביטוי "4 פילים". פירושו "פיל ועוד פיל ועוד פיל ועוד פיל", או בקיצור "4 פעמים פיל". ובאמת, כשאנחנו מונים אנחנו מציינים כמה פעמים יחידה - תהיה אשר תהיה - חוזרת על עצמה. בפעולת הכפל היחידה שאנחנו מונים היא עצמה אוסף של עצמים. כך למשל, פירוש הביטוי "5 מקלות" הוא שהיחידה מקל חוזרת 5 פעמים, ופירוש הביטוי "3 פעמים 5 מקלות" הוא שהיחידה 5 מקלות חוזרת 3 פעמים. במובן זה, "3 פעמים 5 מקלות" אינו תרגיל חשבוני, אלא תיאור של איגוד של עצמים (5 מקלות) החוזר 3 פעמים. התיאור הופך לתרגיל חשבוני כששואלים כמה מקלות יש.

שימו לב: בביטוי "3 פעמים 5 מקלות" המספר 3 אינו מונה מקלות, כי אם חמשות של מקלות!

מערך מלבני

כבר בפרקי החיבור והחיסור נוכחנו כי שימוש בייצוג חזותי טוב הוא כלי מועיל. נתבונן באיור 7.2 המציג את הביטוי 4×5 :



איור 7.2

באיור 7.2 כל איגוד של עצמים מיוצג באמצעות עמודת סימנים שמספרם כגודלו של הנכפל. אנחנו מעתיקים עמודה זו מספר פעמים כגודלו של הכופל, ועל ידי מיקום העמודות זו לצד זו יוצרים מערך מלבני של סימנים. סך כל הסימנים במערך זה שווה לערך המכפלה. בהמשך ניעזר בייצוג זה כדי לנמק את חוקי הכפל: חוק החילוף, חוק הקיבוץ וחוק הפילוג.

שימו לב: ההחלטה לזהות את מספר העמודות עם הכופל ואת מספר השורות עם הנכפל שרירותית. באותה המידה יכולנו להפוך את הבחירה.

תכונות פעולת הכפל

גם לפעולת הכפל, כמו לפעולת החיבור ולפעולת החיסור, תכונות המייחדות אותה.

חוק החילוף

חוק החילוף בפעולת הכפל קובע שהחלפת הסדר בין הכופל לנכפל אינה משנה את המכפלה. כך למשל:

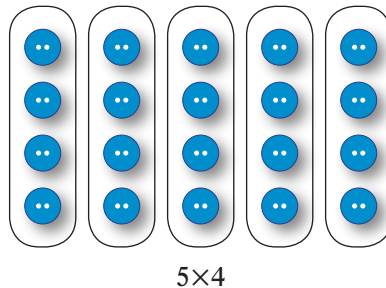
$$5 \times 7 = 7 \times 5$$

$$13 \times 462 = 462 \times 13$$

בכתיב אלגברי חוק החילוף קובע כי לכל שני מספרים a ו- b מתקיים:

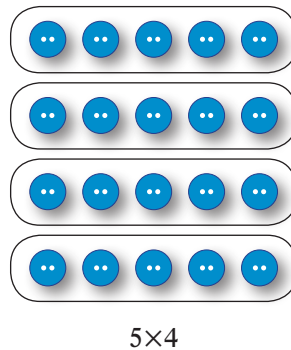
$$a \times b = b \times a$$

כדי שנבין את הסיבה שבגללה הכפל מקיים את חוק החילוף ולא נקבלה כעובדה שרירותית, נתבונן למשל בביטוי 5×4 . איור 7.3 ממחיש ביטוי זה באמצעות 5 עמודות המונות כל אחת 4 סימנים, ומאורגנות במערך מלבני:



איור 7.3

כדי לחשב את המכפלה נמנה את סך הסימנים. נוכל למנות אותם טור אחר טור ונוכל למנות אותם גם שורה אחר שורה, באופן שתואם את הביטוי 5×4 (איור 7.4):



איור 7.4

מאחר שתוצאת המנייה בשני המקרים היא זהה, הרי ש:

$$5 \times 4 = 4 \times 5$$

אמנם בדוגמה זו ביססנו חוק על בחינה של מקרה פרטי, ואף על פי כן, המסקנה תקפה גם אם המספרים 4 ו-5 יוחלפו במספרים אחרים.

דרך נוספת לנמק את תקפותו של חוק החילוף בכפל היא לסובב את המלבן ב-90 מעלות, מה שגורר החלפת תפקידים בין השורות לעמודות מבלי לשנות את סך הסימנים.

שימו לב: העובדה שטיעון שהיה תקף במשוואה

$$5 \times 4 = 4 \times 5$$

יהיה תקף גם במספרים גבוהים יותר אינה בהכרח מובנת לתלמידים. נסו לעורר בכיתה דיון. שאלו את התלמידים אם הביטויים שלהלן שקולים:

$$4,097 \times 78,234 \quad \text{ו-} \quad 78,234 \times 4,097$$

ועודדו אותם להשיב בלי לחשב את המכפלה.

חוק הקיבוץ

חוק הקיבוץ בכפל קובע כי לכל שלישית מספרים a, b ו- c מתקיים:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

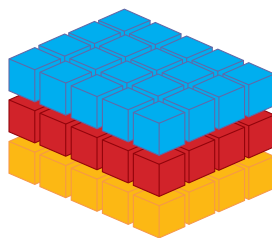
למשל:

$$\begin{array}{r} 3 \times (4 \times 5) \\ \quad \quad \quad \underline{20} \\ \underline{\quad \quad \quad} \\ 60 \end{array} = \begin{array}{r} (3 \times 4) \times 5 \\ \quad \quad \quad \underline{12} \\ \underline{\quad \quad \quad} \\ 60 \end{array}$$

כדי לבסס את תקפותו של החוק, נבחן מקרה פרטי. נתבונן בביטוי:

$$3 \times (4 \times 5)$$

ביטוי זה מייצג 3 פעמים משהו שנמצא בסוגריים, כשאותו "משהו" במקרה זה הוא "4 פעמים 5". את ה"משהו" הזה אפשר לייצג כמערך מלבני. למשל: 4 עמודות בנות 5 עצמים, וכך אנחנו מקבלים מבנה תלת-ממדי, כפי שמוצג באיור 7.5:

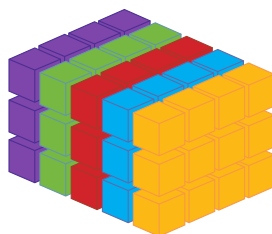


איור 7.5

לעומת זאת, נתבונן בביטוי:

$$5 \times (3 \times 4)$$

את הביטוי הזה נוכל לייצג כמערך בן 5 שכבות שכל אחת מהן היא מערך מלבני של 3 עמודות בנות 4 עצמים, כפי שמוצג באיור 7.6:



איור 7.6

מכיוון שבשני המקרים לפנינו אותה קבוצת עצמים, הרי שנוכל להסיק ששני הביטויים החשבוניים שווים, כלומר:

$$3 \times (4 \times 5) = 5 \times (3 \times 4)$$

ואם נשתמש עתה בחוק החילוף נוכל להמיר את האגף הימני בביטוי השקול: $(3 \times 4) \times 5$, ולקבל את חוק הקיבוץ בהצגתו המקובלת:

$$3 \times (4 \times 5) = (3 \times 4) \times 5$$

חוק הפילוג

שלא כמו שני חוקי החילוף ושני חוקי הקיבוץ המתייחסים לפעולות החיבור והכפל בנפרד, חוק הפילוג מקשר בין שתי הפעולות. חוק הפילוג קובע כי לכל שלושה מספרים a , b ו- c מתקיים:

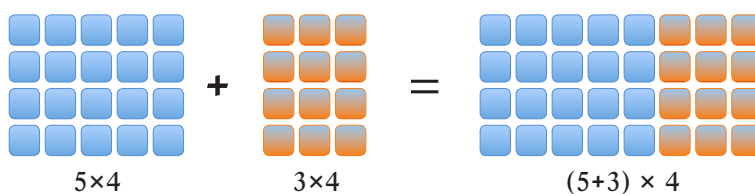
$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

למשל:

$$\underbrace{\underbrace{(5+3)}_8 \times 4}_{32} = \underbrace{5 \times 4}_{20} + \underbrace{3 \times 4}_{12} = 32$$

חוק הפילוג נובע ישירות ממשמעות הכפל כמונה קבוצות של עצמים מאוגדים.

אפשר לפרש את הדוגמה המספרית לעיל כך: 5 עצמים ועוד 3 עצמים הם 8 עצמים (כל עוד המילה "עצם" מתייחסת בשני המקרים לעצמים מאותו סוג). נחליף את המילה "עצם" בצירוף כלשהו, נניח "4 תפוחים", ונקבל ש-5 פעמים 4 תפוחים ועוד 3 פעמים 4 תפוחים הם 8 פעמים 4 תפוחים. נמחיש את הזהות הזאת באיור 7.7:



איור 7.7

באופן דומה אפשר לנסח חוק פילוג הקושר בין הכפל ובין החיסור, שלפיו לכל שלושה מספרים a , b ו- c מתקיים:

$$(a - b) \times c = a \times c - b \times c$$

למשל:

$$\underbrace{\underbrace{(12-3)}_9 \times 8}_{72} = \underbrace{12 \times 8}_{96} - \underbrace{3 \times 8}_{24} = 72$$

את הזהות בין שני האגפים בדוגמה לעיל אפשר להסביר באמצעות חיסור של קבוצות של עצמים מאוגדים: 12 עצמים פחות 3 עצמים הם 9 עצמים (כל עוד המילה "עצם" מתייחסת בשני המקרים לעצמים מאותו סוג). נחליף את המילה "עצם" בצירוף כלשהו, נניח "8 תפוחים", ונקבל ש-12 פעמים 8 תפוחים פחות 3 פעמים 8 תפוחים הם 9 פעמים 8 תפוחים.

שימו לב: מכיוון שאנחנו כבר יודעים שכפל מקיים את חוק החילוף, הרי שאת חוק הפילוג נוכל לכתוב גם בשני האופנים הבאים:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

$$a \times (b - c) = a \times b - a \times c$$

חוקי הגדלה

עוד תכונה אופיינית לפעולת הכפל היא שאם נכפול את הכופל או את הנכפל בגורם כלשהו, המכפלה תוכפל אף היא באותו גורם. למשל:

$$(2 \times 4) \times 6 = 2 \times 24 \quad \text{אז:} \quad 4 \times 6 = 24 \quad \text{מכיוון ש:}$$

ובאותו אופן:

$$4 \times (6 \times 3) = 24 \times 3 \quad \text{אז:} \quad 4 \times 6 = 24 \quad \text{מכיוון ש:}$$

ייתכן שהבחנתם שחוקים אלה הם למעשה חוק הקיבוץ במסווה. עם זאת, אנחנו מציגים אותם תחת כותרת נפרדת שכן באופן זה הם ישתלבו היטב בלימוד פעולת החילוק שבה נדון בפרק הבא.

איבר ניטרלי

פעם אחת 5 היא 5, ואילו 5 פעמים 1 הם 5. המספר 1 מקיים את התכונה הבאה: לכל מספר a :

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

במילים אחרות, כש-1 הוא גורם בביטוי כפלי אז המכפלה המתקבלת שווה לגורם האחר. מתמטיקאים אומרים ש-1 הוא איבר ניטרלי ביחס לכפל. תכונתו של 1 בהקשר של כפל זהה לתכונתו של 0 בהקשר של חיבור. זוכרים? (עמ' 37).

כפל ב־0

כמה הם 5 פעמים 0? או במילים אחרות: כמה עצמים יש ב־5 קבוצות המונות כל אחת 0 עצמים? מכיוון שכפל הוא חיבור חוזר הרי ש:

$$5 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0$$

ולכן התשובה היא: 0. מתוך כך ברור שהמכפלה היתה 0 גם אילו הכופל היה כל מספר אחר.

ועתה: כמה הם 0 פעמים 5? או במילים אחרות: כמה עצמים יש ב־0 קבוצות המונות כל אחת 5 עצמים? גם כש־0 הוא הכופל התשובה היא: 0. מתוך כך ברור שהמכפלה היתה 0 גם אילו הנכפל היה כל מספר אחר.

פתרון שאלות מילוליות

רבות מהשאלות המילוליות המחייבות פעולת כפל בנויות במבנה שבו הנכפל מייצג כמות, והכופל את מספר הפעמים שהכמות חוזרת. למשל:

בכל אריזה יש 8 עפרונות. כמה עפרונות יש ב־6 אריזות?

תרגול שאלות מילוליות הוא הזדמנות טובה לשלב נושאים אחרים המופיעים בתוכנית הלימודים, כמו מדידות אורך, מדידות זמן וכסף. למשל:

היקפו של מסלול הריצה הוא 400 מטר. איזה מרחק רצתי אם השלמתי 5 הקפות?

או:

בדקה יש 60 שניות ובשעה יש 60 דקות. הרכבת מגיעה בעוד שעתיים. בעוד כמה דקות תגיע? בעוד כמה שניות?

או:

מכונית הנוסעת במהירות 90 קמ"ש עוברת בכל שעה מרחק של 90 ק"מ. איזה מרחק תעבור ב־4 שעות?

נתבונן בדוגמה הבאה. היא שונה מעט:

לאלון 5 תפוחים. לגילי פי 4 תפוחים יותר מאשר לאלון. כמה תפוחים יש לגילי?

מה משמעות המילה פי? "פי" היא מילה נרדפת ל"פעמים". הביטוי "פי 4 ממספר" שקול לביטוי "4 פעמים המספר".

חישוב צירופים

לימוד הכפל הוא הזדמנות טובה ללמוד גם קומבינטוריקה בסיסית – תחום במתמטיקה העוסק במניית צירופים. נתבונן בשאלה הבאה:

יש לנו 3 כובעים, 1 כחול, 1 אדום ו־1 ירוק, ועלינו לבחור בכובע אחד מבין השלושה. כמה בחירות אפשריות קיימות?

התשובה היא 3, כמובן, שכן אפשר לבחור או את הכובע הכחול או את הכובע האדום או את הכובע הירוק.

עתה, נתבונן בשאלה מורכבת מעט יותר:

נוסף על 3 הכובעים יש לנו גם 4 חולצות בצבעים תכלת, צהוב, אדום, וירוק. עלינו לבחור כובע אחד וחולצה אחת מתוך המבחר. כמה צירופים שונים קיימים?



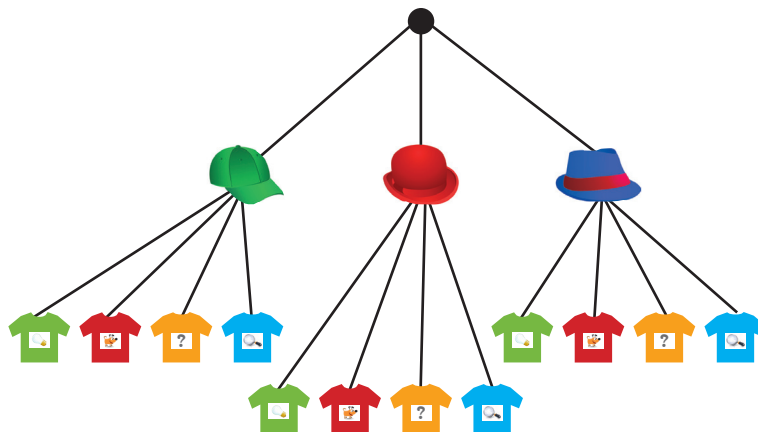
איור 7.8

אפשר להתחיל למנות את כל הצירופים האפשריים, אבל אין זה מעשי לנהוג כך כשהמספרים גדולים יותר. כמו כן, לא תמיד קל לנהל מעקב אחר הצירופים שכבר צוינו. דרך שיטתית, קלה ונוחה לפתור את השאלה היא באמצעות טבלה:

תכלת	צהוב	אדום	ירוק	כובע/חולצה
				כחול
				אדום
				ירוק

כל שורה בטבלה מייצגת כובע וכל עמודה מייצגת חולצה, כך שכל משבצת מייצגת צירוף של כובע וחולצה. ייצוג זה מראה בבירור שמספר הצירופים האפשריים שווה למספר הכובעים כפול מספר החולצות, 12 במקרה זה.

דרך חלופית לייצוג כל האפשרויות היא עץ הסתעפויות:



איור 7.9

כיצד קוראים את העץ? מתבוננים בשורש (הנקודה שבראש התרשים). מהשורש יוצאים 3 ענפים המייצגים את 3 הכובעים, ומכל ענף מסתעפים 4 עלים המייצגים את מבחר החולצות. בחירה של כובע וחולצה מיוצגת במסלול המתחיל בשורש העץ ומסתיים באחד העלים. מספר הצירופים האפשריים, אם כן, הוא כמספר העלים, במקרה זה 12.

שימו לב: אין כל חשיבות לצבעים. יכולנו לכנותם "צבע מספר 1", "צבע מספר 2" וכו'. למעשה אין גם חשיבות לכך שהמאפיין הוא צבע, וגם לא לכך שאנחנו עוסקים בצירופים של כובעים וחולצות.

נוסיף לשאלה עוד נדבך:

נוסף על כובעים ועל חולצות יש לנו גם 5 זוגות מכנסיים, ועלינו לבחור כובע, חולצה וזוג מכנסיים. כמה צירופים שונים קיימים?



איור 7.10

אפשר לפתור שאלה זו בדרכים שונות. דרך אחת היא לייצג את כל הצירופים האפשריים בטבלה תלת-ממדית בת 5 שורות - שורה אחת לכל זוג מכנסיים. כל שורה מכילה 5-תהיה טבלה דו-ממדית בת 4 שורות ו-3 עמודות. בדרך ייצוג זו נוכל לראות שמספר הצירופים האפשריים הוא:

$$3 \times 4 \times 5 = 60$$

דרך אחרת היא להסתמך על ידע קודם - לכובע + חולצה קיימים 12 צירופים אפשריים - ולהתייחס לשאלה כדורשת בחירה של שני פריטים בלבד: פריט אחד "מאוגד" (כובע + חולצה) שממנו קיימים 12, ומכנסיים שמהם קיימים 5. מכיוון שאנחנו כבר יודעים שבמקרה זה מספר הצירופים הוא מכפלת הכמויות, הרי שסך כל הצירופים בשאלה זו הוא:

$$12 \times 5 = 60$$

דרך זו פשוטה יותר ליישום במקרים של צירופים רבים יותר. למשל, אם נידרש לבחור בנוסף על כובע, חולצה ומכנסיים גם עניבה מתוך מבחר של 6 עניבות.

שימו לב: חישוב צירופים הוצג כיישום של כפל. במקרה זה, שלא כמו בשאלות הכפל הנפוצות, קיימת סימטריה בין הכופל ובין הנכפל. מצב נוסף שבו יש סימטריה בין הכופל ובין הנכפל הוא בחישוב שטח של מלבן, נושא שאליו נגיע בהמשך (פרק 19, "שטח").

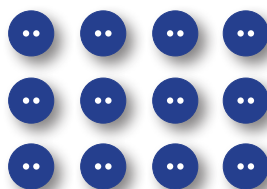


חישוב פעולת הכפל

מי שיודע למנות יודע לכפול

בדיוק כפי שטענו בפרקי החיבור והחיסור, נטען גם כאן: מי שיודע למנות, יודע לכפול.

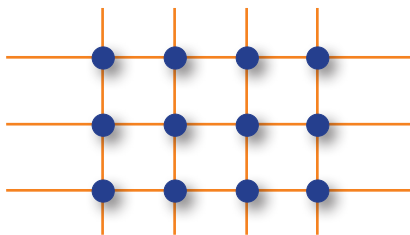
קיימת דרך פשוטה שבאמצעותה הופכים תרגיל כפל למשימת מנייה. למשל, את הביטוי 3×4 נציג כמערך מלבני שבו 4 עמודות שבכל אחת 3 סימנים (איור 7.11):



איור 7.11

עתה נמנה את הסימנים.

דרך אחרת לחישוב אותה מכפלה היא לשרטט 3 קווים אופקיים, לחתוך אותם ב-4 קווים אנכיים, ולמנות את נקודות החיתוך (איור 7.12):

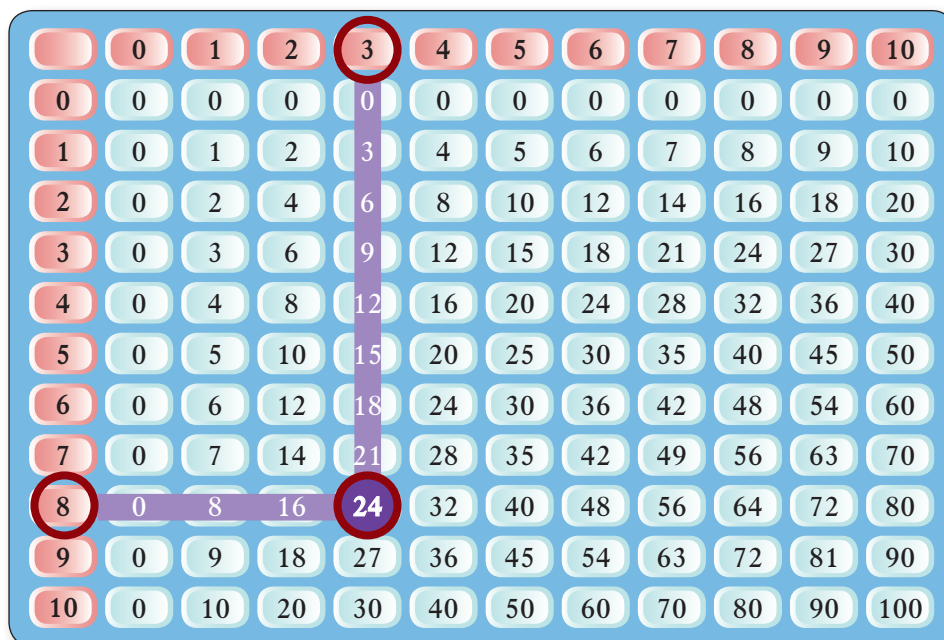


איור 7.12

שימו לב: דרך ההמחשה אינה חשובה. הרעיון שחשוב להדגיש הוא שגם תרגיל כפל בבסיסו הוא תרגיל מנייה.

לוח הכפל

בכיתה ד' לומדים לחשב תרגילי כפל בתחום מספרים לא-מוגבל. בכיתות ב' ו-ג שמים את הדגש על שליטה בלוח הכפל, כלומר, על שליטה בכל המכפלות המתקבלות מגורמים בתחום העשרת הראשונה. הסיבה טובה: חישובי כפל במספרים גבוהים יותר מבוססים על סדרת פעולות כפל שכולן שאובות מתחום העשרת הראשונה, ולכן, כדי להתמודד בהצלחה עם חישובים מורכבים, נחוצה שליטה בלוח הכפל (איור 7.13):



איור 7.13

אסטרטגיות חישוב שונות

מומלץ לנצל את השלבים המוקדמים של לימוד הכפל כדי לפתח בתלמידים יכולות של חישוב מנטלי. בפרט, רצוי שהם יאמצו אסטרטגיות מגוונות לביצוע פעולות כפל בתחום ה-100 בטרם ילמדו את לוח הכפל בעל-פה. מיד נמנה כמה אסטרטגיות אפשריות, בהן ספירה בדילוגים, שימוש בחוק הקיבוץ ושימוש בחוק הפילוג, וסביר להניח שאסטרטגיות רבות אחרות יפתחו התלמידים בעצמם. כל עוד דרך חשיבתם נכונה, יש לעודד אותם לפתח דרכים רבות ככל שניתן.

ספירה בדילוגים

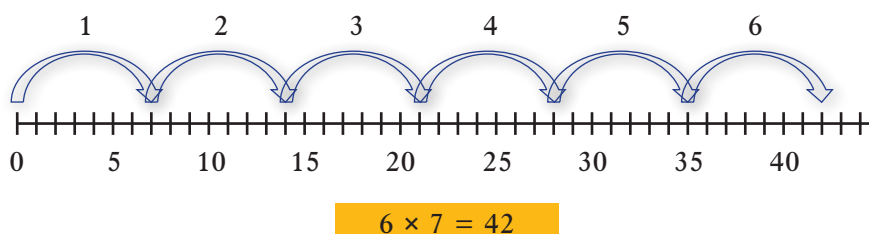
הדרך הבסיסית לחשב מכפלות היא ספירה בדילוגים. נניח שאנחנו רוצים לחשב כמה הם:

$$6 \times 7$$

שהם כאמור:

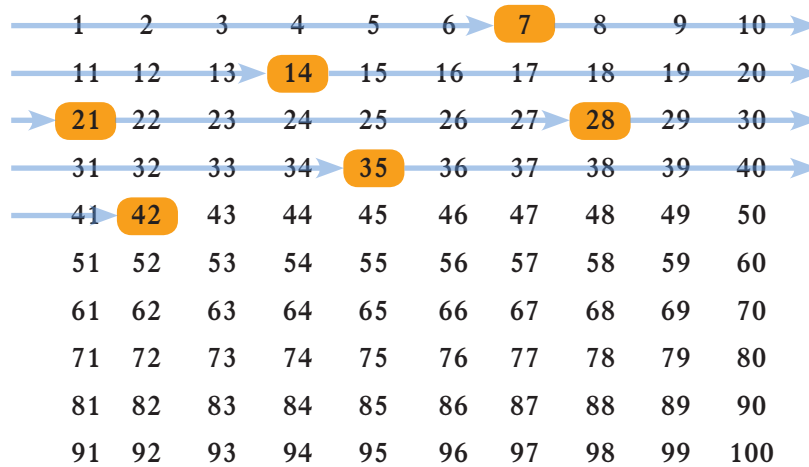
$$7+7+7+7+7+7$$

כפי שאפשר לראות באיור 7.14, אילו הצגנו זאת על ישר המספרים, היינו מתחילים מ-0, וממנו סופרים 6 דילוגים של 7:



איור 7.14

ספירה בדילוגים אפשר להמחיש גם על לוח המאה:



איור 7.15

אני ממליץ להתחיל לתרגל ספירה בדילוגים כבר בעת לימוד פעולת החיבור. אפשר להציגה כמשחק בטרם תשמש כלי לחישוב כפל.

שימוש בחוק הקיבוץ

נזכיר שחוק הקיבוץ קובע שתוצאת מכפלה שבה שלושה גורמים אינה משתנה אם משנים את האופן שבו מקבצים את הגורמים.

נניח שאנחנו יודעים כבר ש:

$$3 \times 9 = 27$$

ואנחנו רוצים לחשב כמה הם

$$6 \times 9$$

אפשר לפתור את התרגיל בעזרת חוק הקיבוץ (או בשם הנוסף שכינינו אותו, חוק ההגדלה):

$$6 \times 9 = 2 \times (3 \times 9) = 2 \times 27 = 54$$

יש להניח שהתלמיד יבטא זאת כך: אם 3 פעמים 9 הם 27, אז 6 פעמים 9 הם 27 כפול 2.

שימוש בחוק הפילוג

אם למשל התלמיד בקיא בלוח הכפל בתרגילים שבהם הגורמים אינם עולים על 5, אז הוא יכול לחשב את המכפלה 7×5 באופן הבא:

$$7 \times 5 = (4 + 3) \times 5 = 4 \times 5 + 3 \times 5 = 20 + 15 = 35$$

שימוש שכיח נוסף בחוק הפילוג הוא חישוב כפולות של 9:

$$9 \times 7 = (10 - 1) \times 7 = 10 \times 7 - 1 \times 7 = 70 - 7 = 63$$

או במילים: אם 10 פעמים 7 הם 70, אז 9 פעמים 7 קטנים מ-70 ב-7.

שיטות נוספות

תלמידים יכולים לאמץ מגוון "טריקים". למשל:

כפולות של 9: אחד המאפיינים של מכפלות בתחום לוח הכפל, שבהן אחד הגורמים הוא 9 הוא שסכום הספרות הוא 9, ואילו ספרת העשרות קטנה ב-1 מהגורם האחר. למשל, במכפלה 7×9 ספרת העשרות תהיה 6, ואילו ספרת האחדות תשלים את סכום הספרות ל-9, ומכאן שהמכפלה תהיה 63.

כפולות של 5: אחד המאפיינים של מכפלות שבהן אחד הגורמים הוא 5 הוא שספרת האחדות היא 5 אם הגורם האחר אי-זוגי, ו-0 אם הגורם האחר זוגי. הכרת עובדה זו אינה נותנת בידי התלמיד שיטה לכפול ב-5 אבל היא מצמצמת בעבורו את מגוון התשובות האפשריות, ובזאת מקטינה את הסיכוי שיטעה.

כפל ב-10

כפל ב-10 הוא הפעולה החשובה ביותר הנלמדת כהכנה לכפל של מספרים רב-ספרתיים. הכלל שמלמדים בבית הספר הוא: כשכופלים מספר ב-10 מוסיפים לו אפס מימין, או במילים אחרות: את המספר שאותו כופלים ב-10 מזיזים מקום אחד שמאלה, ומציבים אפס בספרת האחדות. למשל:

$$10 \times 423 = 4230$$

גם במקרה זה חשוב להסביר לתלמידים את הסיבה לכלל. לשם הדגמה נתבונן בביטוי:

$$6 \times 10$$

הדרך הטבעית לחשוב עליו היא כ-6 פעמים 10, אבל אפשר גם לתאר אותו כ-6 עשרות. כדי לייצג 6 עשרות בייצוג העשרוני ממקמים את ה-6 בעמודת העשרות ואת 0 כשומר מקום בעמודת האחדות. שימו לב לעובדה שהגענו לכך ש: $6 \times 10 = 60$ מבלי לחשב למעשה דבר.

מה לגבי הביטוי 12×10 ? 12 עשרות הן 10 עשרות ועוד 2 עשרות. כבר ידוע לנו ש-10 עשרות הן מאה (ראו פרק 2), כך שהביטוי שקול למאה אחת ועוד 2 עשרות, ובייצוג העשרוני: 120.

תרגילים

1. התבוננו במשוואות הבאות:

$2 \times 2 = 4$	$1 \times 3 = 3$
$3 \times 3 = 9$	$2 \times 4 = 8$
$4 \times 4 = 16$	$3 \times 5 = 15$
$5 \times 5 = 25$	$4 \times 6 = 24$
$6 \times 6 = 36$	$5 \times 7 = 35$

א. מהי החוקיות המתגלה בטבלה זו?

ב. אם ידוע ש: $13 \times 13 = 169$ אז כמה הם 12×14 ?

ג. מצאו הסבר מדוע "קסם" זה עובד.

2. הציגו לפני התלמידים תרגיל כפל שבו שלוש ספרות שאינן ידועות, ומקומן מסומן באותיות א, ב ו-ג:

?	$\times$	?	?
א		ב	ג

שלוש הספרות ניתנו לתלמידים בזו אחר זו. בכל פעם שניתנה לתלמידים ספרה היה עליהם למקמה באחד משלושת המקומות, מבלי שיוכלו לשנות את בחירתם בהמשך. מטרת התלמידים היתה לקבל תרגיל כפל שמכפלתו גדולה ככל שניתן.

א. הספרה הראשונה שניתנה לתלמידים היתה "1".

דינה אמרה שצריך למקם ספרה זו במקום א, כי עדיף למקם מספרים קטנים במספר החד-ספרתי.

יהודה אמר שצריך למקם ספרה זו במקום ג, אבל התקשה להסביר מדוע.

מי לדעתכם צודק? מדוע?

ב. הספרה השנייה שניתנה לתלמידים היתה "9".

דינה אמרה שצריך למקם ספרה זו במקום א (ובדיעבד שמחה שהצעתו של יהודה התקבלה בסעיף הקודם), אבל התקשתה להסביר מדוע.

יהודה אמר שיש למקם ספרה זו במקום ב, כי עדיף למקם מספרים גדולים בספרת העשרות שהיא המשמעותית ביותר.

מי לדעתכם צודק? מדוע?

3. המורה הציגה לפני התלמידים את השאלה הבאה:

בפרדס יש 18 שורות של עצים. בכל שורה יש 21 עצי תפוח ו-17 עצי לימון.
כמה עצים יש בפרדס?

המורה ביקשה מהתלמידים לכתוב ביטוי חשבוני מתאים.

טל כתב את הביטוי: $18 \times (21 + 17)$

אלון כתב את הביטוי: $18 \times 21 + 18 \times 17$

א. האם שתי התשובות מתאימות?

ב. מה מבטא הביטוי $21+17$ בתשובתו של טל?

ג. מה מבטא הביטוי 18×17 בתשובתו של אלון?

4. ציירו את עץ ההסתעפויות המתאים לבחירת כובע, חולצה ומכנסיים כשידוע שלבחירתכם עומדים 3 כובעים, 4 חולצות ו-2 זוגות מכנסיים. הסבירו כיצד אפשר ללמוד מעץ זה כמה צירופים שונים קיימים.

5. כשממלאים טופס בטו יש לנחש תוצאות של 15 משחקי כדורגל. לכל משחק 3 תוצאות אפשריות: או שהקבוצה הביתית מנצחת, או שהקבוצה האורחת מנצחת, או שהמשחק מסתיים בשוויון. מהו מספר הצירופים האפשריים לתוצאות כל 15 המשחקים? האם תוכלו לצייר עץ הסתעפויות מתאים?

6. בכמה דרכים שונות אפשר לסדר בשורה שני ילדים? שלושה? ארבעה? עשרה?

7. שגיאה נפוצה של תלמידים מתוארת בפתרון (השגוי) של התרגיל הבא:

$$9 \times 8 = 10 \times 8 - 9 = 80 - 9 = 71$$

הסבירו את מקור השגיאה, והציעו דרך להתמודד איתה.

8. עיינו בספרי הלימוד שמשמשים אתכם בכיתה, ונסו לקבוע אם הספרים מדגישים את התפקידים השונים של הכופל והנכפל, או שלהפך, נוטים להציג את הכופל והנכפל כסימטריים.

