

פרק 4 - חיבור

צירוף • הוספה • מחוברים וסכום • פתרון שאלות מילוליות • חוק החילוף • חוק
הקיבוץ • איבר ניטרלי • חישוב בתחום ה-20 • אוטומציה של חישובים • לוח החיבור
חיבור באמצעות ישר המספרים

מה בפרק?

מהו חיבור?



נניח שמוצגות לפנינו שתי קבוצות עצמים, למשל, קבוצה שבה עפרונות וקבוצה שבה מחקים, ומספר העצמים בכל קבוצה ידוע. למשל, ידוע שיש בקבוצה האחת 4 עפרונות ובקבוצה האחרת 5 מחקים. בשלב הבא מצרפים את שתי הקבוצות לקבוצה אחת (המונח המתמטי הוא איחוד קבוצות זרות) ועתה מבקשים מאיתנו לומר מהו מספר העצמים בקבוצה שהתקבלה מצירוף שתי הקבוצות, או במקרה שלנו עלינו לענות על השאלה כמה מכשירי כתיבה יש בסך הכול.

בשאלה מסוג זה העובדה הראשונה בחשיבותה היא שהתשובה אינה תלויה בסוג העצמים (לצורך העניין, אין זה משנה אם מדובר בעפרונות ומחקים או במחברות ועטים), והיא אינה תלויה אף באופן שבו צורפו שתי הקבוצות. הסיבה לכך היא שמנייה אינה תלויה לא בזהות העצמים ולא באופן המנייה, ולכן ניתן לשאול "כמה הם 4 ועוד 5?" באופן מנותק מהקשר מוחשי. כדי לפתור את השאלה, עלינו למצוא את מספר העצמים בקבוצה שהתקבלה מצירוף קבוצה שבה 4 עצמים לקבוצה שבה 5 עצמים. במקרה זה התשובה היא 9.

כתיב מתמטי

הביטוי החשבוני:

$$5 + 4$$

מבטא את תוצאת פעולת החיבור של זוג המספרים 5 ו-4. למה הכוונה?
כפי שלמדנו בפרק 3 (עמ' 28), לביטוי חשבוני, המשלב מספרים ופעולות חשבון, יש ערך מספרי. הערך המספרי של ביטוי חשבוני זה, שבמרכזו הסימן + ומשני צדיו המספרים 5 ו-4, הוא מספר העצמים בקבוצה שהתקבלה מצירוף קבוצה שבה 5 עצמים לקבוצה שבה 4 עצמים.

מינוחים

במשוואה כמר:

$$4 + 5 = 9$$

שלושה מספרים. את שני המספרים המופיעים משני צדיו של הסימן + (שאותם כינינו בפרק 3 האופרנדים של פעולת החיבור) אנחנו מכנים מחוברים, שכן אלה שני המספרים שאותם מחברים. לתוצאת פעולת החיבור, במקרה זה ל-9, קוראים סכום.

עוד על פעולת החיבור

1. ידע קודם: לפני שמלמדים נושא חדש, חשוב לדעת מהו הידע הקודם הדרוש לשם הבנתו. האופן שבו הגדרנו את פעולת החיבור מבוסס על מנייה, שנדונה בפרק 1: אנחנו מניחים שביכולתנו למנות את איברי הקבוצה שהתקבלה מצירוף שתי קבוצות.
2. אייתלות בפרטים: העובדה שבצירוף קבוצות מספר העצמים אינו תלוי במהות העצמים אינה מובנת מאליה, אלא פרי ניסיון מצטבר. אפשר לומר זאת לתלמידים כעובדה אבל אני מאמין שמוטב שילמדו זאת דרך התנסות חווייתית. למשל, אפשר לשאול את התלמידים "כמה הם 2 אפונים ועוד 3 אפונים?", ולאחר שענו לשאול אותם, "כמה הם 2 עפרונות ועוד 3 עפרונות?", וכך הלאה, עד שיגלו בעצמם ש"2 ועוד 3 הם תמיד 5".
3. צירוף סימטרי: את פעולת החיבור הצגנו כתוצאה של צירוף של שתי קבוצות, ואין כל חשיבות לסדר הצירוף, כלומר, אין חשיבות לאיזוהי הקבוצה הראשונה ואיזוהי הקבוצה השנייה. מעמד הקבוצות סימטרי. נחזור לנקודה זו בדיון שעניינו תכונות פעולת החיבור.
4. צירוף שאינו סימטרי: על אף הנאמר בסעיף הקודם, לעתים קבוצות מצורפות זו לזו באופן כזה שבו מעמדן אינו סימטרי. למשל, מצב שבו 8 ילדים שיחקו במגרש המשחקים ואז נוספו אליהם 2 ילדים שונה ממצב שבו שיחקו תחילה 2 ילדים ואז נוספו אליהם 8. במקרים אלה יש לפעולת החיבור משמעות של הוספה, שהיא למעשה צירוף שבו אחת הקבוצות נתפסת כ"נשארת במקומה". העובדה שבשני המקרים היו בסופו של דבר 10 ילדים מעידה פעם נוספת על כך שתוצאת הצירוף אינה תלויה בסדר הצירוף.
5. צירוף אינו בהכרח פיזי: נתבונן בשאלה הבאה: בשכבת כיתות ג שתי כיתות. בכיתה ג1 21 תלמידים, ובכיתה ג2 24 תלמידים. כמה תלמידים בשכבת כיתות ג? בשאלה זו שכבת ג היא צירוף של שתי כיתות, אבל כדי לענות על השאלה אין הכרח לבצע את הצירוף במציאות.
6. חיבור של מספרים סידוריים: בהקשר של מספרים סידוריים, לפעולת החיבור משמעות שונה. נתבונן בשאלה הבאה: נניח שגילי עומדת רביעית בתור, ואלון עומד שלוש מקומות אחריה. מהו מיקומו של אלון בתור? כדי לענות על השאלה, יש לחשב אמנם כמה הם 4 ועוד 3 (שוב, משמעות של הוספה), אבל לשני המספרים בהקשר זה משמעות שונה: ה-4 הוא מספר סידורי (מיקומה של גילי), וה-3 מבטא מרחק או פער בין שני מספרים סידוריים (בין מיקומה של גילי למיקומו של אלון). התוצאה (מיקומו של אלון) היא שוב מספר סידורי.

פתרון שאלות מילוליות

פתרון שאלות מילוליות הוא למעשה הסיבה שלשמה הומצאה המתמטיקה. הבנה מעמיקה של פעולת החשבון מצריכה יכולת לעבור משאלה מילולית לתרגיל מופשט, ולהפך, מתרגיל מופשט לשאלה מילולית.

משאלה מילולית לתרגיל מופשט

כפי שצוין בפרק 3, אחת המטרות החשובות של לימוד פעולות החשבון היא ללמוד להסב שאלה מילולית לתרגיל מופשט.

המתמטיקה פותחה כדי לפתור בעיות קונקרטיות. שאלה כמו מציאת מספר מכשירי הכתיבה בקבוצה שהתקבלה מצירוף של 4 עפרונות ו-5 מחקים היא שאלה מוחשית וקונקרטית. מורים למתמטיקה נוהגים לכנות שאלות מסוג זה סיפורים חשבוניים, או שאלות מילוליות. המתמטיקה, בשאיפתה לזקק את השאלה מכל נתון שאינו חיוני לפתרונה, ממירה את השאלה המילולית לתרגיל חשבוני מופשט, שבו יש למצוא את הערך המספרי של הביטוי החשבוני:

$$4 + 5$$

מתרגיל מופשט לשאלה מילולית

העובדה שקיימות שאלות מילוליות שונות המתורגמות לכדי אותו תרגיל מופשט "מצדיקה" למעשה את העיסוק במתמטיקה. חשיבותו של התרגיל המופשט היא בהיותו מייצג אינספור בעיות מוחשיות שונות. נניח שנשאלנו כמה הם 21 ועוד 14. מהי השאלה המילולית המתאימה לתרגיל זה? ניתן לרקום לו שאלות מילוליות שונות. למשל:



1. בכיסי הימני 21 שקלים ובכיסי השמאלי 14 שקלים. כמה שקלים יש לי בסך הכול?
2. היו לי 21 תמרים. קיבלתי עוד 14. כמה תמרים יש לי עתה?
3. אחי בן 21 ואני מבוגר ממנו ב-14 שנים. בן כמה אני?
4. אני גר בקומה ה-21 וחבר שלי גר 14 קומות מעלי. באיזו קומה גר החבר שלי?

ריבוי השאלות המילוליות שניתן לייחס לאותו תרגיל נותן ביד התלמידים (ובידינו) חופש לבחור בסיפור שיהפוך את החישוב לקל יותר בעבורם. למשל, כשאנחנו מנסים למצוא את הערך המספרי של הביטוי החשבוני $9+2$, קל לנו יותר לדמיין מצב שבו ל-9 עצמים נוספו 2 עצמים מאשר מצב שבו ל-2 עצמים נוספו 9. החופש לבחור שאלה מילולית משמעותי במיוחד בפעולות החיסור והחילוק, דבר שנדון בו בהמשך.

תכונותיה של פעולת החיבור

לפעולת החיבור, בדומה לפעולות החשבון האחרות, חוקים וכללים ייחודיים שאותם היא מקיימת. בעמודים הבאים נציג ונפרט ארבעה חוקים: חוק החילוף, חוק הקיבוץ, קיומו של איבר נייטרלי וחוקי הגדלה והקטנה. כדאי להכיר היטב חוקים וכללים אלה, כי הבנתם מרכזית הן להבנת הפעולה הן ליכולת לבצע אותה.

חוק החילוף

את חוק החילוף כבר למדנו למעשה בעמודים הקודמים. חוק זה קובע שהחלפת סדר המחברים אינו משנה את הסכום, והוא נובע מהעובדה שצירוף קבוצות הוא פעולה סימטרית. כך למשל:

$$6 + 5 = 5 + 6$$

$$17 + 35 = 35 + 17$$

$$18,214 + 5,003 = 5,003 + 18,214$$

שימו לב: אנחנו כותבים זהויות בין ביטויים חשבוניים מבלי לחשב דבר.

ביטוי חוק בכתיב אלגברי

כדי לבטא חוק מתמטי כדוגמת חוק החילוף נהוג להשתמש במשתנים, שכן אין ביכולתנו לכתוב בזו אחר זו את אינספור הדוגמאות הממחישות אותו. משתנה הוא סמל שמבטא ערך כללי, ושבמקומו ניתן להציב כל מספר (הוא נקרא משתנה מפני שערכו יכול להשתנות). מקובל לסמן משתנים באותיות לטיניות. מדוע? אין סיבה מיוחדת. זו בחירה שרירותית של סימון. מי שאינו מרגיש בנוח עם האותיות הלטיניות יכול לבטא משתנים בסימנים אחרים, למשל: ▲ או ■.

כדומה לביטויים חשבוניים המבטאים פעולות חשבון בין מספרים, כך ביטויים אלגבריים מבטאים פעולות חשבון בין משתנים או בין משתנים ומספרים. משוואה שבאחד מצדיה (לכל הפחות) נמצא ביטוי אלגברי מכונה משוואה אלגברית.

בתרגומו לכתיב אלגברי, חוק החילוף קובע שלכל שני מספרים, שאותם נסמן באותיות a ו-b, מתקיים:

$$a + b = b + a$$

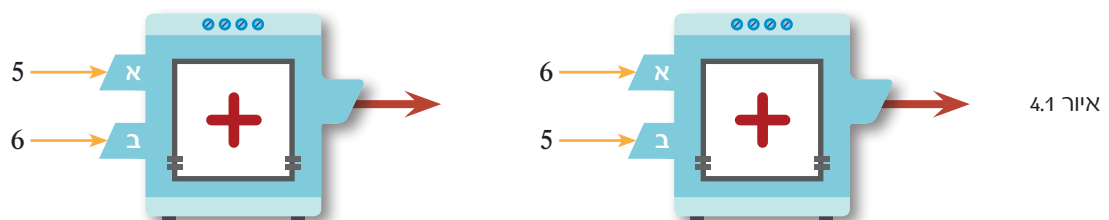
משמעות משוואה זו היא שבעבור כל זוג ערכים מספריים שנציב במקום האותיות a ו-b, הביטוי החשבוני a+b יהיה שווה-ערך לביטוי החשבוני b+a. למי שבחר בסימנים אחרים, למשל ■, ו ▲, חוק החילוף קובע שלכל זוג ערכים שנציב במקום סימנים אלה מתקיים:

$$\blacksquare + \blacktriangle = \blacktriangle + \blacksquare$$

שימו לב: כשאנחנו כותבים ביטוי אלגברי שיש בו משתנה (למשל a) המופיע יותר מפעם אחת, עלינו להציב אותו ערך מספרי בכל המופעים שלו.

חוק החילוף ב"מכונות חיבור"

זווית התבוננות נוספת על חוק החילוף היא באמצעות "מכונות החיבור" שהכרנו בפרק 3 (עמ' 27). בהקשר זה חוק החילוף קובע שתוצאת החיבור לא תשתנה אם נכניס למכונה אותו זוג מספרים בסדר הפוך. כך למשל, בשני המקרים המוצגים באיור 4.1 תתקבל אותה התוצאה:



חוק הקיבוץ

נתבונן בשאלה הבאה:

בשכבת כיתות ב שלוש כיתות. בכיתה ב 24 תלמידים, בכיתה ב 28 תלמידים, ובכיתה ב 26 תלמידים. כמה תלמידים בשכבת כיתות ב?

במה שונה שאלה זו מהשאלות המילוליות שבהן דנו עד כה? כל הדוגמאות שבהן דנו עד עתה תיארו צירוף של שתי קבוצות בלבד, ואילו זאת הפעם הראשונה שבה מתוארת בעיה שבה מצורפות שלוש קבוצות. לכאורה אין כאן כל בעיה: צירוף של שלוש קבוצות אינו פחות טבעי מצירוף של שתי קבוצות, ולכן נראה מאוד פשוט להגדיר את פעולות החיבור גם בעבור שלושה מחוברים ויותר. מתברר שמה שטבעי בחיי היומיום אינו בהכרח טבעי כשמגדירים פעולה מתמטית, ושהמתמטיקה דווקא פשוטה יותר אם מגדירים את פעולת חיבור רק בין זוגות של מספרים.



נשאלת השאלה: אם פעולת החיבור מוגדרת רק בעבור זוגות של מספרים, כיצד נפתור את השאלה המילולית על שלוש כיתות ב?

כדי לפתור שאלה העוסקת בצירוף של יותר משתי קבוצות יש לבצע את הצירוף בכמה שלבים, שבכל אחד מהם נצרף זו לזו רק שתי קבוצות. כך למשל, תחילה נצרף את 24 תלמידי ב 1 ואת 28 תלמידי ב 2 לכדי קבוצה אחת, ואז נצרף לקבוצה זו את 26 תלמידי כיתה ב 3. למעשה, ביצענו כאן שתי פעולות חיבור עוקבות. הביטוי החשבוני לפעולות אלה הוא:

$$(24 + 28) + 26$$

שימו לב: סימני הסוגריים מציינים את סדר הפעולות: תחילה חיברנו 24 ו-28, ואת ה-26 חיברנו לסכום שהתקבל.

ההחלטה לצרף תחילה את תלמידי ב 1 ו-28 היתה שרירותית. באותה מידה יכולנו לצרף תחילה את 28 תלמידי ב 2 עם 26 תלמידי ב 3, ואז לצרף לקבוצה זו את 24 תלמידי ב 1. הביטוי החשבוני לפעולות אלה הוא:

$$24 + (28+26)$$

חוק הקיבוץ קובע שבשני המקרים שתיארנו לעיל יתקבל אותו הסכום. גם חוק זה, בדומה לחוק החילוף שכבר הכרנו, מתבסס על העובדה שתוצאת מנייה אינה מושפעת מסדר העצמים.

בתרגומו לכתוב אלגברי, חוק הקיבוץ קובע שלכל שלושה מספרים, שאותם נסמן באותיות a , b ו- c מתקיים:

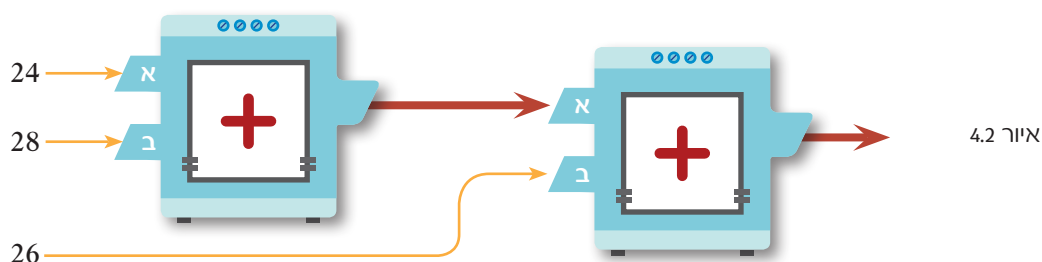
$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$(\bullet + \blacksquare) + \blacktriangle = \bullet + (\blacksquare + \blacktriangle)$$

ההבחנה בין חוק החילוף לחוק הקיבוץ

רבים מתקשים להבחין בין חוק החילוף לחוק הקיבוץ, שכן שניהם נובעים למעשה מאותו העיקרון שלפיו תוצאת מנייה אינה תלויה בסידור העצמים. מעבר לכך, לרבים לא ברור מדוע נדרשים שני החוקים. הסיבה ששני החוקים נחוצים לנו היא התעקשותנו להגדיר את פעולת החיבור רק בעבור זוגות של מספרים.

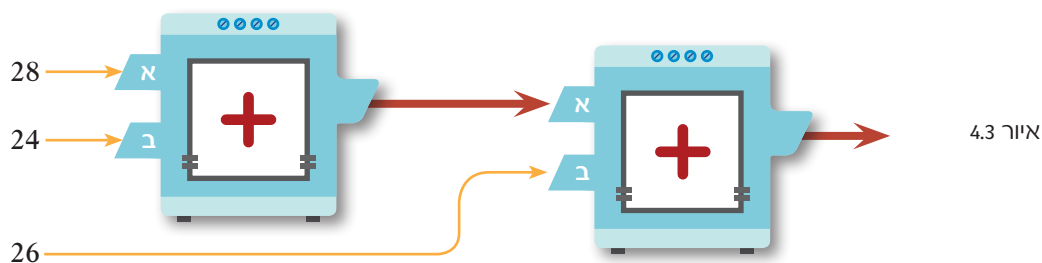
נדגים את ההבדל בין חוק החילוף לחוק הקיבוץ באמצעות "מכונת החיבור" שאותה אנחנו כבר מכירים. שימוש אפשרי במכונות חיבור כדי לסכם את מספר התלמידים בשכבת כיתות ב בדוגמה לעיל מוצג באיור 4.2:



לאיור זה מתאים הביטוי החשבוני:

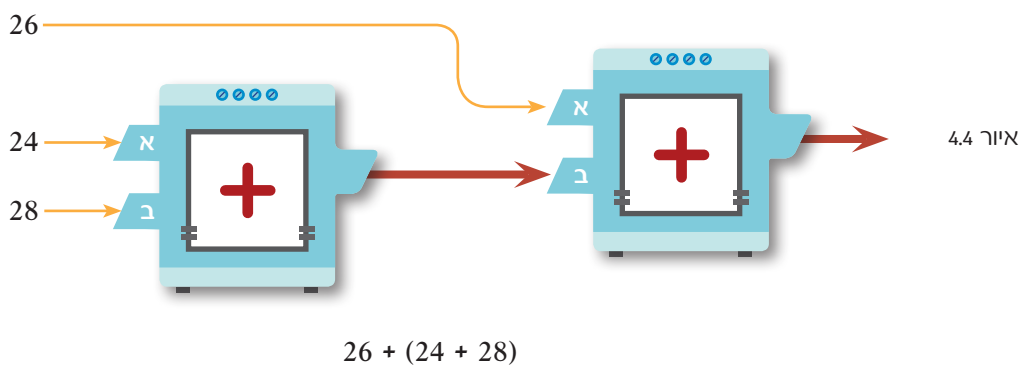
$$(24 + 28) + 26$$

ניזכר עתה בחוק החילוף שקובע שתוצאת החיבור לא תשתנה אם נחליף את הסדר בין שני מחוברים. מכיוון שבאיור 4.2 מוצגות שתי פעולות חיבור עוקבות, אפשר להחליף את סדר המחוברים באחת או בשתיים ממכונות החיבור, ולקבל את רצפי הפעולות הבאים:

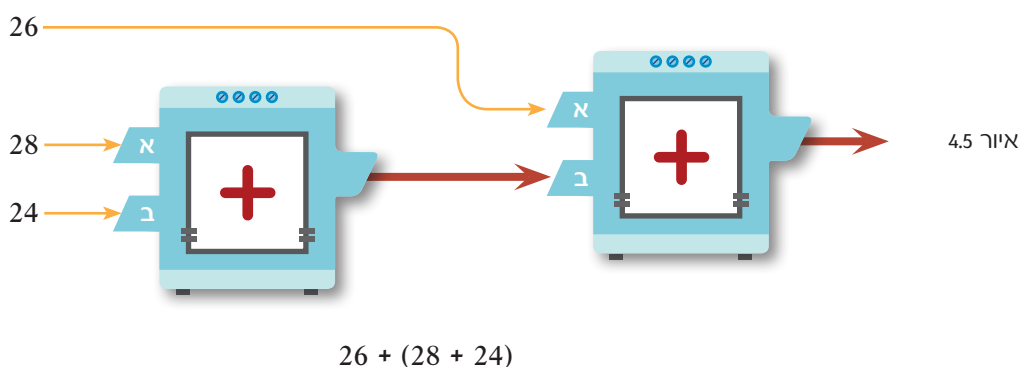


$$(28 + 24) + 26$$

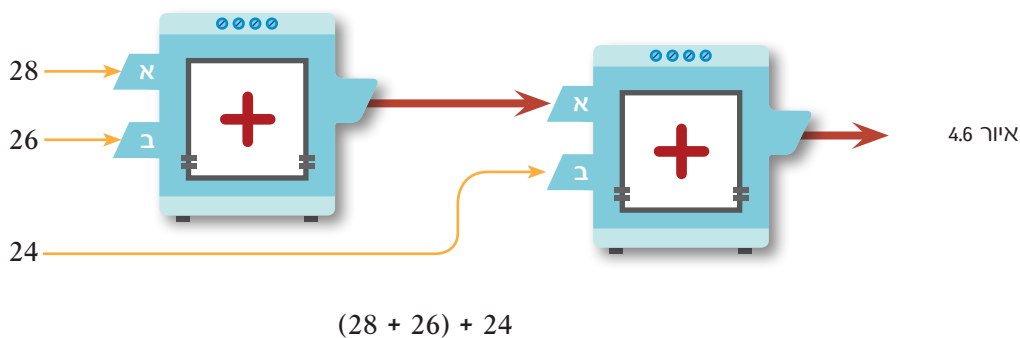
וגם



וגם



חוק החילוף קובע שבכל אחד מארבעת המקרים (איורים 4.2 עד 4.5) תתקבל אותה תוצאה מספרית.
שימו לב: בכל ארבעת האיורים לעיל המספרים 24 ו-28 חוברו זה לזה לפני שסכומם חובר ל-26.
 חוק החילוף אינו מצדיק, למשל, מעבר מסדר פעולות כפי שמוצג באיור 4.2 לסדר הפעולות המוצג באיור 4.6:



כדי לעשות זאת, אנחנו זקוקים גם לחוק הקיבוץ.

שילוב בין חוק החילוף וחוק הקיבוץ

כשמשלים בין חוק החילוף ובין חוק הקיבוץ מגיעים למסקנה שימושית מאוד: כשצריך לסכם אוסף של מחוברים, תוצאת החיבור אינה תלויה באופן שבו מסדרים ומקבצים אותם. למשל, את הביטוי החשובי:

$$9 + 7 + 4 + 1 + 3$$

ניתן להחליף בביטוי חשבוני שווה-ערך:

$$(9+1) + (7+3) + 4$$

שאותו קל יותר לחשב לאחר שלמדנו לזהות זוגות מספרים שסכומם עשר.

איבר ניטרלי

בהקשר של פעולת החיבור למספר 0 מעמד מיוחד: צירוף קבוצה שבה 0 איברים לקבוצה אחרת כמוהו כאי-עשיית דבר. כתוצאה מכך, אם 0 הוא אחד המחוברים בפעולת חיבור, אזי הסכום המתקבל שווה למחובר האחר. למשל:

$$23 + 0 = 23$$

$$0 + 346 = 346$$

$$32,171 + 0 = 32,171$$

לאורך שנים רבות הוספת 0 נראתה לאנושות פעולה ריקה מתוכן. כדי לפרש ביטוי חשבוני כדוגמת $5+0$ כמבטא צירוף שתי קבוצות שאחת מהן ריקה, נדרשת רמת הפשטה גבוהה. בדיוק כמו בחוקי החילוף והקיבוץ, נשתמש בכתוב אלגברי כדי לנסח חוק כללי המתאר את תכונתו של המספר 0 ביחס לפעולת החיבור. לכל מספר a מתקיים:

$$0 + a = a \quad \text{ו} \quad a + 0 = a$$

משמעות הזהויות היא שלכל ערך מספרי שנציב במקום המשתנה a , שני צדי המשוואה יהיו תמיד שווים-ערך. תכונה זו של 0 מכונה ניטרליות, שפירושה בהקשר זה הוא אי-שינוי של תוצאה. מתמטיקאים קובעים ש-0 הוא איבר ניטרלי ביחס לפעולת החיבור.

חוקי הגדלה והקטנה

נניח שאנחנו יודעים כי:

$$242 + 769 = 1,011$$

האם נדע בקלות כמה הם

$$242 + 768 \quad \text{או} \quad 243 + 769 \quad ?$$



חוק ההגדלה בחיבור קובע בפשטות שאם נגדיל את אחד המחוברים ונשאיר את האחר ללא שינוי, אזי הסכום יגדל בשיעור זהה למחובר שהוגדל. בדומה, חוק ההקטנה בחיבור קובע שאם נקטין את אחד המחוברים ונשאיר את השני ללא שינוי, אזי הסכום יקטן בשיעור זהה למחובר שהוקטן. שילוב חוק ההגדלה וחוק ההקטנה גורר את הכלל הבא: אם נגדיל את אחד המחוברים ונקטין את האחר בשיעור זהה, אזי סכום המחוברים לא ישתנה.

למשל, ערכו של הביטוי החשבוני:

$$29 + 15$$

שווה לערכו של ביטוי חשבוני שבו הגדלנו את המחובר הראשון ב-1 והקטנו את המחובר השני ב-1:

$$30 + 14$$

מה הרווחנו מהשינוי? ביטוי חשבוני שווה-ערך וקל יותר לחישוב!

כתיב אלגברי

נניח שאנחנו מחברים שני מספרים שמסומנים ב- a וב- b , שסכומם הוא $a+b$. אם נגדיל, למשל, את המחובר הראשון ב- c ונשאיר את השני ללא שינוי, תרגיל החיבור יהיה:

$$(a + c) + b = \boxed{?}$$

מאחר שחוק ההגדלה קובע שכתוצאה מהגדלת המחובר הראשון יגדל הסכום אף הוא ב- c , תוצאת התרגיל תהיה:

$$(a + b) + c$$

במילים אחרות, הראינו למעשה שחוק ההגדלה קובע שלכל שלושה מספרים שאנחנו מייצגים באמצעות הסימנים a , b ו- c מתקיים:

$$(a + c) + b = (a + b) + c$$

האם זה מזכיר לכם משהו? אם ניישם בשני צדי המשוואה את חוק החילוף, נקבל:

$$b + (a + c) = (b + a) + c$$

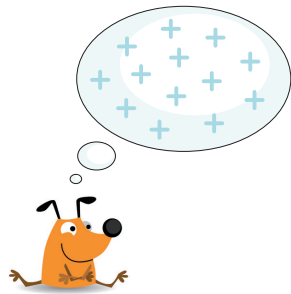
כלומר, חוק ההגדלה, וכמוהו חוק ההקטנה, הם ניסוחים מעט אחרים של חוק הקיבוץ.



חישוב פעולת החיבור

עד כה דנו בפעולת החיבור מבלי להתייחס כלל לשאלה כיצד לפתור תרגילי חיבור. עשינו זאת משום שאין כל טעם לפתור תרגילים אם מהות הפעולה אינה ברורה. עתה, לאחר שהכרנו את פעולת החיבור מבחינת משמעותה ותכונותיה, ולאחר שהתוודענו למונח "תרגיל" ולאופן שבו הוא מוצג בספר זה, נפנה סוף-סוף לדון באופן החישוב. בתוך כך נבין מדוע משמעויות הפעולה הן הבסיס שעליו מבוססות כל

שיטות החישוב. בסעיפים הבאים נתמקד בחיבור בתחום ה-20, כלומר בתחום הנדרש מתלמידי כיתה א. בפרק 11 נרחיב את הטיפול לתחום מספרים לא-מוגבל.



מי שיודע למנות יודע לחבר

נתבונן בתרגיל הבא:

$$2 + 7 = \boxed{?}$$

פתרון באמצעים מוחשיים

בהנחה שאנחנו יודעים למנות עצמים, דרך אפשרית לפתרון התרגיל היא לחזור למשמעות הבסיסית של פעולת החיבור, ולבצע את ארבעת הצעדים הבאים:

- ליצור שתי קבוצות, אחת בת 2 עצמים ואחת בת 7 עצמים.
- לצרף את שתי הקבוצות.
- למנות את מספר העצמים בקבוצה שהתקבלה.
- תוצאה המנייה היא גם תוצאת התרגיל.

(אנחנו כבר מכירים את הכלל: אין זה משנה מה הם העצמים ואין זה משנה כיצד מונים אותם.) זו אולי דרך לא כל כך יעילה לפתרון תרגיל, אבל זאת המשמעות הבסיסית של פעולת החיבור, וכשכל גישה אחרת נכשלת, יש לחזור אל הדרך הזאת.

פתרון באמצעות איור

שלב חשוב בהתפתחות המתמטית הוא להבין שאין הכרח למנות קבוצות של עצמים מוחשיים. בדרך אל הפתרון נוכל תמיד לייצג עצמים באיור (בדיוק כפי שאין זה משנה מה הם העצמים, כך אין זה משנה כיצד מאיירים אותם. השיקול בבחירת הייצוג הוא מינימום עבודה ומקסימום בהירות). ראו למשל את איור 4.7 המייצג את התרגיל:

$$2 + 7 = \boxed{?}$$



איור 4.7

לאחר שביטאנו את התרגיל באיור, כל שנותר הוא למנות את סך הסימנים בשתי הקבוצות יחדיו. גם פתרון בדרך זו, בדומה לפתרון בדרך של מניית עצמים מוחשיים, מחדד את הקשר בין חיבור למנייה, והבנת הקשר הזה היא המאפשרת לנו לחפש דרכי קיצור לפתרון.

מניית המשך

נחזור ונתבונן באותו התרגיל, ועתה, במקום לראות בחיבור פעולה של צירוף שתי קבוצות, נתייחס אליה כאל פעולה שבה קבוצה אחת נוספת לקבוצה אחרת. במקרה זה נחיל מיד את חוק החילוף, ובמקום

להוסיף קבוצה בת 7 עצמים לקבוצה בת 2 עצמים, נוסיף קבוצה בת 2 עצמים לקבוצה בת 7 עצמים. היתרון בדרך פתרון זו הוא שאין צורך למנות מחדש את 7 העצמים, ואפשר לבצע מיד מניית המשך של 2 העצמים שנוספו: 8, 9.

אוטומציה של חישובים

תלמידי כיתה א נדרשים במהלך שנת הלימודים הראשונה לפתור במהירות תרגילי חיבור בתחום העשרת הראשונה. אינני בטוח שיכולת זו כרוכה בהכרח בלמידה בעל-פה. אני מאמין שיכולת זו היא תוצאה של תהליך חשיבה שבמשך הזמן מקנה יכולת אוטומטית שאינה מחייבת גיבוש אסטרטגיית פתרון בכל פעם מחדש. האוטומציה הזאת תהיה שונה מתלמיד לתלמיד. אחד, למשל, יזכור בעל-פה ש: $2+2=4$, בעוד אחר יראה לנגד עיניו שני זוגות של עצמים ויזהה חזותית, מבלי למנות, שלפניו ארבעה עצמים. אגב, כפי שהזכרנו בפרק 1 (עמ' 12), זיהוי חזותי של כמויות עצמים יכול להועיל מאוד באוטומציה של פתרון תרגילי חיבור במספרים קטנים.

תרגילים שסכומם 10

בשל מעמדו המיוחד של המספר 10 בייצוג העשרוני, אני ממליץ לשלוט בביטויי חיבור שסכומם 10, כלומר לזהות באופן אוטומטי את המשוואות שלהלן:

$$10 + 0 = 10$$

$$0 + 10 = 10$$

$$9 + 1 = 10$$

$$1 + 9 = 10$$

$$8 + 2 = 10$$

$$2 + 8 = 10$$

$$7 + 3 = 10$$

$$3 + 7 = 10$$

$$6 + 4 = 10$$

$$4 + 6 = 10$$

$$5 + 5 = 10$$

שימו לב: כדאי שהזיהוי האוטומטי יהיה דו-כיווני, כלומר שתלמידים לא רק ילמדו לפתור תרגילי חיבור שסכומם 10, אלא ילמדו גם לפרק את המספר 10 לשני מחוברים בכל הדרכים האפשריות. הדבר חשוב משום שבחישוב מעבר לתחום העשרת הראשונה ניעזר רבות בהשלמה ל-10.

חיבור בתחום ה-20

חציית העשרת

בסוף כיתה א נדרשים התלמידים לשלוט בחיבור בתחום ה-20, ובפרט ליכולת לחצות את העשרת. נשאלת כמעט מאליה השאלה: מה מיוחד כל כך בחציית העשרת?

בפתרון תרגיל חיבור שבו הסכום גדול מ-10 נדרשת מהתלמיד יכולת לשלב בין שתי מיומנויות: האחת היא חישוב, והאחרת היא ארגון כמות בייצוג עשרוני. כדי להמחיש את ההבחנה בין שתי מיומנויות אלה,

נדמיין לרגע שהיינו מייצגים מספרים בעזרת קווים, כפי שעשינו בפרק 2 (עמ' 19):

| || ||| |||| |||||

כיצד במקרה זה היינו מייצגים הביטויים $3+4$ ו- $8+7$?

את הביטוי:

$$3 + 4$$

היינו כותבים כך:

||| + ||||

ואת הביטוי:

$$8 + 7$$

היינו כותבים כך:

||||||| + |||||||

בדרך ביטוי זו לא היה למעשה מה לחשב, שכן החיבור היה כרוך רק בהסרת סימן ה"ועוד" ובהצמדת שתי קבוצות הקווים זו לזו.

השימוש בייצוג העשרוני אינו באמת משפיע על התרגיל $3+4$, שכן 3 הוא סמל ל-|||, 4 הוא סמל ל-||||, והתוצאה 7 היא סמל ל-|||||||.

ההבדל בין הייצוג העשרוני ובין ייצוג שבו לכל עצם מותאם סימן בא לידי ביטוי רק כשחוצים את תחום העשרת הראשונה, כמו למשל בתרגיל $8+7$. אז, בדיוק כפי שעשה הרועה באגדה (פרק 2, עמ' 18), אנחנו מאגדים עשרת ליחידה חדשה. תוצאת התרגיל $8+7$ תיראה, אם כן, כך:

||||||| + ||||||| = ~~|||||||~~ |||||

את העשרת המאוגדת אפשר עתה לסמן בסימן מקוצר. זהו למעשה העיקרון שעליו מבוסס הכתיב הרומי שהוזכר בפרק 2 (עמ' 25). בכתיב רומי התרגיל ופתרונו ייכתבו כך:

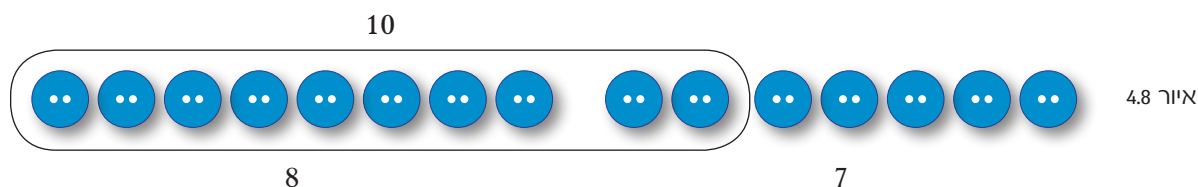
||||||| + |||| = X ||||

מעבר ממוחשי למופשט

כיצד מנחילים לתלמידים את מיומנות חציית העשרת? גם כאן, כמו בכל נושא אחר, ההתחלה חייבת להיות מוחשית, ומהמוחשי נעשה המעבר למופשט. כך למשל, תלמיד שיחשב מהו הסכום של $8+7$ בדרך של צירוף שתי קבוצות עצמים (נניח גפרורים), איגודם של עשרה מביניהם (נניח בעזרת גומייה), וזיהוי חזותי שלפניו 10 עצמים מאוגדים ועוד 5 עצמים שאינם מאוגדים, יבין את העומד מאחורי המשוואה:

$$8 + 7 = 15$$

תחילתה של ההפשטה נעשית במעבר מן המוחשי לאיור. באיור איגוד לעשרת יכול להיעשות בתיחום עשרה סימנים, כמו שמציג איור 4.8:



את אסטרטגיית הפתרון נוכל לבטא עתה במילים: העברנו 2 סימנים מקבוצת ה-7 כדי להשלים את קבוצת ה-8 לעשרת, וכך קיבלנו שתי קבוצות: האחת של 10 סימנים והאחרת של 5 סימנים, ויחד הן 15.

שימוש בחוקי החיבור

רמה גבוהה מזו של הפשטה היא שילוב בין חוק ההגדלה לחוק ההקטנה: נגדיל מחובר אחד ב-2 ונקטין את האחר ב-2, ונקבל:

$$8 + 7 = 10 + 5$$

שימו לב: אין הכרח לפתור תרגילים אלה ואחרים בדרך של השלמה לעשרת. אם תלמיד יעדיף את הדרך:

$$8 + 7 = 8 + 8 - 1 = 16 - 1 = 15$$

חשוב לאפשר לו לפעול בדרך הנוחה לו. ככל שתלמידים ייחשפו ליותר דרכי פתרון, כך ירבו הכלים שברשותם.

קיימים גם חישובים מעבר לתחום העשרת שאינם כרוכים באיגוד עשרת חדשה. למשל התרגיל:

$$14 + 5 = \boxed{?}$$

הוא דוגמה ראשונה לסוג תרגילים שבהם אפשר להפריד את הטיפול באחדות מהטיפול בעשרות. נבהיר זאת באמצעות מודל מוחשי: מחובר אחד (14) מורכב מעשרת מאוגדת ומ-4 עצמים לא-מאוגדים, והמחובר האחר כולל 5 עצמים לא מאוגדים. כשמצרפים את שתי הקבוצות, מצד אחד אין כל צורך לפרק את העשרת המאוגדת, ומנגד אין אפשרות לאגד עשרת חדשה, כך שבפועל החישוב היחיד שאותו יש לבצע הוא צירוף העצמים הלא-מאוגדים, כלומר, חישוב הסכום 4+5, ולו להוסיף את העשרת המאוגדת.

שימו לב: גם במקרה זה אנחנו עושים שימוש בחוק הקיבוץ.

פעילויות בנושא אוטומציה של חישוב

אחת הדילמות המעסיקות מורים היא כמה זמן עליהם להקדיש לתרגול על חשבון הקניה של תכנים והעמקת ההבנה של התלמידים. אישית אני מאמין שההבחנה בין השלושה אינה רצויה, שכן כל עיסוק

נכון במתמטיקה משלב בין שלושת המרכיבים. ננסח אם כן את הדילמה באופן שונה: כמה זמן עלינו להקדיש לאוטומציה של החישוב, כלומר, ליכולת של התלמיד להגיע לתוצאה מספרית בזמן קצר, אם כתוצאה מלימוד בעל-פה ואם כתוצאה מיכולת להפעיל במהירות אסטרטגיות חשיבה?

לא אענה על השאלה אבל אציע פעילויות התורמות לאוטומציה של החישוב מחד וגוזלות זמן מזערי מאידך.

א. **מרוץ חשבון:** פעילות זו חושפת את התלמידים למקבצי תרגילים בתחום שבו רוצים להקנות להם אוטומציה. השאיפה היא להקצות זמן קצר, למשל 90 שניות, כך שפתרון המקבץ כולו יאלץ את התלמידים לוותר על דרכי פתרון הגוזלות זמן, ולחפש אסטרטגיות פתרון מהירות ויעילות. להלן מקבץ תרגילים לדוגמה:



מרוץ חשבון - חיבור עד 20

$$6 + 2 = \underline{\quad}$$

$$3 + 1 = \underline{\quad}$$

$$9 + 0 = \underline{\quad}$$

$$8 + 5 = \underline{\quad}$$

$$11 + 2 = \underline{\quad}$$

$$5 + 7 = \underline{\quad}$$

$$12 + 6 = \underline{\quad}$$

$$1 + 7 = \underline{\quad}$$

$$14 + 5 = \underline{\quad}$$

$$5 + 14 = \underline{\quad}$$

$$0 + 20 = \underline{\quad}$$

$$1 + 2 = \underline{\quad}$$

$$17 + 3 = \underline{\quad}$$

$$4 + 9 = \underline{\quad}$$

$$6 + 4 = \underline{\quad}$$

$$5 + 2 = \underline{\quad}$$

$$13 + 3 = \underline{\quad}$$

$$8 + 7 = \underline{\quad}$$

$$7 + 7 = \underline{\quad}$$

$$2 + 11 = \underline{\quad}$$

$$6 + 13 = \underline{\quad}$$



אפשר לחזור על אותו מקבץ תרגילים מדי יום ולעקוב אחר ההתקדמות של כל תלמיד. מומלץ להתאים את זמן הפתרון לרמת התלמידים, עם זאת, בכל פעם שבה ניכר שיפור במיומנויות התלמידים אפשר ורצוי לקצר את הקצאת הזמן.

ב. **פעילויות בקוביות משחק:** דרך נוספת לתרגול מהנה של חיבור בתחום ה-20 היא שימוש בקוביות משחק: מטילים שתי קוביות ומבקשים מהתלמידים לחשב את הסכום במהירות מרבית. גם פעילות משחקית זו מעודדת את התלמידים לפתח אסטרטגיות חישוב מהירות. למשל, בזכות העובדה שהקוביות המוטלות אינן מסודרות כקובייה ראשונה וקובייה שנייה, תלמידים רבים נוטים להוסיף באופן טבעי מספר קטן למספר גדול. כמו כן, בזכות העובדה שתלמידים לומדים לזהות באופן חזותי תוצאת הטלה של קובייה בודדת, אין להם צורך למנות את מספר הנקודות על הקובייה שאותה הם בוחרים כראשונה, וטבעי בעבורם להשתמש במה שכינינו מניית המשך. רמת מורכבות גבוהה יותר (עדיין בתחום ה-20) נשיג בהטלת שלוש קוביות.



לוח החיבור

את כל תרגילי החיבור שבהם שני המחבורים בתחום העשרת הראשונה ניתן להציג כטבלה המכונה לוח החיבור (איור 4.9).

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

איור 4.9

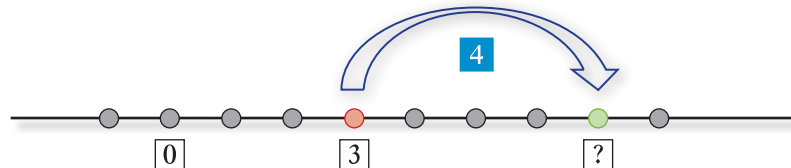
בלוח החיבור אפשר להשתמש כדי לפתור תרגילים. כך למשל, כדי לדעת מהו ערך הביטוי $3+8$ יש למתוח קו אנכי מן העמודה שבראשה המספר 3, וקו אופקי מן השורה שבראשה המספר 8. נקודת המפגש בין הקווים היא הסכום, במקרה זה 11. לכאורה, לוח החיבור יכול להחליף את מיומנות החישוב של תרגילים בתחום זה, אבל אינני ממליץ על כך, שכן כפי שחזרנו והדגשנו, היכולת לחשב באופן עצמאי טומנת בחובה תובנות רבות.

מדוע, אם כן, יש לחשוף את התלמידים ללוח החיבור ולאחר מכן ללוח הכפל? ראשית, אני מאמין שחשוב לפתח אצל התלמידים יכולת לקרוא מידע המאורגן באופנים שונים. שנית, יש בלוח החיבור מגוון תצורות שדיון בהן תורם רבדים נוספים להבנת פעולת החיבור וחוקיה. אפשר למשל לנהל דיון על המאפיינים הבאים של לוח החיבור:

- השורה הראשונה זהה לעמודה הראשונה, השורה השנייה זהה לעמודה השנייה, וכו'. בשפה מתמטית נאמר שהלוח סימטרי ביחס לאלכסון הראשי.
- בכל שורה ובכל טור המספרים מסודרים בסדר עוקב.
- בכל אלכסון שנמתח ימינה ומטה ההפרש בין צמד מספרים עוקבים הוא 2.
- בכל אלכסון שנמתח שמאלה ומטה המספרים אינם משתנים.
- המספר הגבוה ביותר נמצא בפינה הימנית התחתונה של הלוח.
- לכל מספר שנבחר בטבלה אפשר להתאים את כל תרגילי החיבור שהוא סכומם.

חיבור באמצעות ישר המספרים

כזכור, את המספרים הטבעיים אפשר להציג כנקודות על ישר שבו המרחק בין מספרים עוקבים קבוע. נתבונן בביטוי החשבוני $3+4$ ונתאר אותו באמצעות ישר המספרים באופן הזה:



איור 4.10

נבחר את האיור: קבוצה בת 3 עצמים מיוצגת בנקודה שמיקומה 3 צעדים מימין ל-0. תוספת של 4 עצמים מיוצגת בנקודה שמיקומה 4 צעדים מימין לנקודה 3. נקודת המוצא שממנה יוצא החץ באיור היא הנקודה שמייצגת את המחובר הראשון, במקרה זה 3. משם מדלגים ימינה מספר צעדים התואם את גודלו של המחובר הנוסף, במקרה זה 4 צעדים. הסכום הוא הנקודה שאליה הגענו.

שימו לב: חוק החילוף אינו בא לידי ביטוי פשוט בייצוג זה, שכן לשני המחברים תפקידים שונים. עובדה זו מתקשרת להערה שבעמ' 15 שלפיה ישר המספרים מטיב להציג את יחס הסדר בין המספרים אבל מטשטש את תהליך המנייה.

תרגילים

1. מהו המספר השכיח ביותר המתקבל כסכום בהטלת שתי קוביות? מדוע?
2. כיצד מתבטא חוק החילוף בלוח החיבור?
3. בעת לימוד פעולת החיבור המורה הציגה לפני התלמידים את השאלה הזאת:

היום יום שישי. איזה יום יהיה בעוד חמישה ימים?

ערן טען שזו אינה שאלה בחשבון.

נדב חשב שזו שאלה בחשבון אבל טען שהיא אינה קשורה לפעולת החיבור.

רוני חשבה שהשאלה קשורה לפעולת החיבור אבל טענה שאי אפשר להציגה כתרגיל חשבוני.

א. מהי דעתכם על שלוש הטענות שהושמעו?

ב. האם לדעתכם יש מקום להציג שאלה זו בעת לימוד פעולת החיבור?

